



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

**Aplicación de la programación no lineal para la
determinación de la cartera óptima de inversión: una
aplicación al mercado de valores peruano**

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Investigación de
Operaciones y Sistemas

AUTOR

José Alberto CASTILLO MONTES

ASESOR

Mg. Esther BERGER VIDAL

Lima, Perú

2007



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Castillo, J. (2007). *Aplicación de la programación no lineal para la determinación de la cartera óptima de inversión: una aplicación al mercado de valores peruano*. Tesis para optar grado de Magíster en Investigación de Operaciones y Sistemas. Unidad de Posgrado, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

DEDICATORIA

A mis orgullos: **ROSA, ANGIE, ANTONIO, ANGEL Y MAYSUM**

A **FRANCISCO**, por su emblemática enseñanza

A **mi familia**, por estar siempre a mi lado.

A **mis amigos**, y todos aquellos que han tomado y tomarán la decisión de leer y aprender de este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecerle a mis compañeros: Mg. Orestes Bruno, Mg. Carmela Velásquez, Mg. Inés Gambini y todos aquellos cuanto han hecho por mí, para que este trabajo saliera delante de la mejor manera posible.

Al Dr. Rolando Mosquera Ramírez, Director de la Unidad de Post Grado de la UNMSM por su atención y continuos consejos.

Quedo especialmente agradecido a todos mis profesores y en especial a la *Magíster Esther Berger Vidal* por sus enseñanzas y asesoría en la presente tesis.

Debo también expresar mi agradecimiento al Dr. Dante Conti G. y Dra. Maria Bencomo F. Docentes de la Facultad de Ingeniería, Escuela de Sistemas, Departamento de Investigación de Operaciones de la Universidad de los Andes de Venezuela, por su colaboración en el envío de material para desarrollar el último capítulo de mi tesis.

A mi madre Rosa, que desde el cielo estará orgullosa por la culminación de mi trabajo y no podía dejar de lado a mi familia, sin ellos no habría podido llegar a esta meta.

Gracias a todos ellos. *Que Dios los bendiga.*

José Alberto Castillo Montes
Josecastillo_5@hotmail.com

**APLICACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN NO LINEAL PARA LA
DETERMINACIÓN DE LA CARTERA ÓPTIMA DE INVERSIÓN: UNA
APLICACIÓN AL MERCADO DE VALORES PERUANO**

JOSE ALBERTO CASTILLO MONTES

2007

Orientador : Mg. ESTHER BERGER VIDAL

Grado obtenido : Magíster en Investigación de Operaciones y Sistemas

RESUMEN

Uno de los fundamentos esenciales de este trabajo es reconocer, en primer lugar, que el Mercado de Valores Peruano viene demostrando un importante cambio en cuanto a las alternativas de inversión que ofrece. En segundo lugar, es que los inversionistas deben conocer la relación que existe entre la ganancia de un activo financiero y su riesgo, que afecta evidentemente en la composición de una cartera de inversión. Con este propósito resulta importante revisar el modelo ideado por Harry Markowitz, conocido como Media-Varianza, por considerarse una valiosa herramienta cuantitativa que permite realizar la distribución óptima de la inversión, lográndose determinar la frontera eficiente, que es un instrumento útil para guiar a los inversionistas hacia la selección de una cartera o portafolio, que además de cumplir con sus gustos y preferencia, les permita maximizar rendimientos ante un nivel dado de riesgo, o minimizar riesgos para un rendimiento esperado.

Con este objetivo se ha planteado un Problema de Programación No Lineal, específicamente de Programación Cuadrática, requiriéndose datos del movimiento bursátil ofertados por la Bolsa de Valores de Lima y CONASEV, cuya recopilación estadística pertenece a las más importantes empresas accionarias de diversos sectores de la economía nacional. Para las pruebas de investigación se ha utilizado programas computacionales como Solver Excel, Premium Solver Plataform y el WinQSB, respectivamente. Con estos medios operativos, se va a generar la *frontera eficiente* de la cual se podrán obtener los portafolios óptimos de inversión. Este estudio muestra la importancia que tienen los *Modelos de Investigación de Operaciones*, constituyéndose en una herramienta poderosa de las decisiones financieras.

Palabras Claves: Teoría de Carteras de Inversión, Economía Financiera, Programación No lineal, Programación Cuadrática, Modelo de Markowitz, Administración Financiera.

APPLICATION OF THE NOT LINEAR PROGRAMMING FOR THE DETERMINATION OF THE IDEAL PORTFOLIO OF INVESTMENT: AN APPLICATION TO THE PERUVIAN STOCK MARKET

JOSÉ ALBERTO CASTILLO MONTES

2007

Orientation : Mg. ESTHER BERGER VIDAL
Obtained Degree : Masters in Operations Research and Systems

SUMMARY

One of the foundations of this work is to recognize, in first place, that the Peruvian Stock Market comes proving an important change regarding the alternatives of investment offered. Secondly, investors must know the relation that exists between the profit of a financial asset and its risk which evidently affects the composition of a new investment portafolio.

With this intention it turns out important to check the model designed by Harry Markowitz, known as Average-Variance, for being considered a valuable quantitative tool that allows to realize the ideal distribution of the investment, being able to determine the efficient border, which is a useful instrument to guide investors towards the selection of a portfolio, that besides expiring with their tastes and preference, allows them to maximize performances before a certain level of risk, or to minimize risks for an expected performance.

With this aim, a Not Linear Programming has brought up, specifically a Quadratic Programming, there being needed information of the Stock Market Movement offered by the Stock Exchange of Lima and CONASEV, whose statistical summary belongs to the most important share companies of different sectors of the national economy.

For the proofs of research, computer programs have been used, such as Solver Excel, Premium Solver Plataform and the WinQSB, respectively. With these operative means, the efficient border is going to be generated which the ideal investment portafolioes will be able to be obtained. This study shows the importance gotten by the Research Models of Operations, being constituted in a powerful tool for the financial decisions.

KEY WORDS: INVESTMENT PORTAFOLIO THEORY, FINANCIAL ECONOMY,
NOT LINEAR PROGRAMMING, QUADRATIC PROGRAMMING,
MARKOWITZ MODEL, FINACIAL ADMINISTRATION.

ÍNDICE

	Página
Resumen	
Introducción	XI
CAPITULO I	
MARCO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN	
1. Planeamiento del problema	1
1.1 Problema Principal	1
1.2 Limitantes	3
1.2.1 Teórica.	4
1.2.2 Temporal	4
1.2.3 Espacial	4
1.3 Interrogantes	4
1.3.1 General	4
1.3.2 Especifico	5
1.4 Objetivo General	5
1.4.1 Objetivo Especifico	5
1.5 Justificación del Estudio	5
1.6 Marco teórico y conceptual de referencia	
1.6.1 Marco referencial	7
1.6.2 Marco teórico	9
1.6.3 Marco conceptual	12
2. Hipótesis y Metodología	21
2.1 Hipótesis	
2.1.1 Hipótesis general	21
2.1.2 Hipótesis específica	22
2.2 Metodología de la investigación	22
2.2.1 Generales	22
2.2.2 Específicos	23
2.3 Operacionalización de la variable	25
2.4 Población y muestra	25
2.4.1 Muestra o tratamientos de los datos	25
2.4.2 Materiales o instrumentos que se emplearán	26

CAPITULO II**MARCO GENERAL DE LAS DECISIONES DE INVERSIÓN
EN EL MERCADO DE VALORES PERUANO**

2.1 Introducción a las decisiones de inversión en el contexto del Mercado de Valores.	27
2.1.1 Marco conceptual del mercado de valores.	28
2.1.2 Diagnóstico del mercado de valores peruano	32
2.2 Aspectos fundamentales de las decisiones financieras para realizar las inversiones arriesgadas	38
2.3 Teoría moderna de carteras	41
2.3.1 Teoría de selección. Estructura de preferencias	41
2.3.2 Curva de indiferencia	44
2.3.3 Selección de cartera	46
2.3.4 Oportunidades de carteras	48
2.4 Problemas que generan riesgo e incertidumbre.	50
2.5 La medición del riesgo- rendimiento	54
2.5.1 Mapas de indiferencia de riesgo – rendimiento	57
2.5.2 Características del modelo de indiferencia para la elección entre riesgo y rendimiento.	65
2.5.3 Algunas implicaciones del requisito de liquidez	67
2.6 El efecto de la Diversificación en el Riesgo.	70

CAPITULO III**MODELOS DE CARTERAS DE INVERSIÓN PARA CAMBIAR EL
RIESGO**

3.1 Evaluación de los modelos de cartera en condiciones de riesgo	76
3.1.1 Modelo de Markowitz para la selección de cartera.	
3.1.1.1 Introducción.	76
3.1.1.2 Hipótesis	87
3.1.1.3 Cálculo del rendimiento inicial y final.	88
3.1.1.4 El rendimiento esperado.	89
3.1.1.5 Cálculo del coeficiente de correlación (ρ_{il}).	90
3.1.1.6 Cálculo de Beta (β).	90

3.1.1.7	Cálculo y división del riesgo	91
3.1.1.8	El teorema del grupo o frontera eficiente.	93
3.1.1.9	Determinación del grupo factible.	97
3.1.1.10	Determinación de la composición del portafolio T	100
3.1.1.11	Utilidad y aversión al riesgo	105
3.2	Modelo de Mercado de Sharpe. (<i>Capital Asset Pricing Model</i> (CAPM))	
3.2.1	Introducción	108
3.2.2	Revisión del CAPM.	110
3.2.3	Matemáticas del grupo eficiente.	113
3.2.4	La frontera eficiente.	119
3.2.5	La línea del Mercado de Capitales. (CML)	120
3.2.6	Determinación del rendimiento del portafolio <i>M</i>	122

CAPITULO IV

HERRAMIENTAS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES PARA LA OPTIMIZACION DE CARTERAS DE INVERSION:

4.1	Introducción.	126
4.2	Programación cuadrática	126
4.3	Relación con la teoría de cartera	138

CAPITULO V

APLICACIÓN DEL MODELO DE MARKOWITZ POR EL MÉTODO MEDIA – VARIANZA PARA LA DETERMINACIÓN DE LA CARTERA ÓPTIMA EMPLEANDO LA PROGRAMACIÓN CUADRÁTICA. CASO MERCADO DE VALORES PERUANO.

5.1	Marco de trabajo	141
5.2	Información bursátil	143
5.3	Formulación del modelo de Programación Cuadrática	144
5.4	Procesamiento de datos – Programa Excel – Solver	151
5.5	Conclusiones y Recomendaciones	197
	Bibliografía	205
	Anexos	210

INTRODUCCIÓN

En la actualidad es de vital importancia el papel que juegan los mercados financieros en el funcionamiento de la economía productiva, donde su función principal es la de poner en contacto a los accionistas con los productores, de este modo, los primeros satisfacen sus necesidades financieras y los segundos encuentran una utilidad a sus recursos.

La ciencia financiera nos muestra que el principal objetivo financiero de la empresa consiste en maximizar el valor de sus recursos para sus accionistas. Para que este sea realmente operativo, se han desarrollado en los últimos años diferentes modelos, en base a hipótesis realistas sobre las actitudes de los inversores y sobre las características de los mercados de capitales, de tal forma que pudiese ayudar a la toma de decisiones tanto a los inversores como a los directivos de las empresas.

Así se observa un sector financiero consolidado, y más aún “fortalecido”, debido a que en los últimos años se han presentado cambios importantes en el Mercado de Valores Peruano.

Esos cambios han tenido un gran impacto en el campo tecnológico ya que han modificado la estructura operativa del sistema financiero. Todas estas modificaciones han estado sujetas a las disposiciones de la Ley Orgánica, (Decreto Ley N° 26126) y con la promulgación del Decreto Legislativo N° 755, se sentaron las bases para el desarrollo del Mercado de Valores nacional en los últimos años. Este nuevo marco legal posibilitó un mayor dinamismo, que ha producido constantes innovaciones de otras normas conexas, el cual se enmarca en la apertura y modernización de la economía y que se refleja en el mercado bursátil nacional.

En el mercado de valores, el riesgo está generalmente asociado con la posibilidad de que la rentabilidad efectiva sea menor que la esperada y en un principio las causas que contribuyen a variar la rentabilidad (precio y dividendo) constituyen los elementos del riesgo.

Es necesario transformar el concepto de riesgo en algo manejable. El riesgo, definido como la incertidumbre de la futura rentabilidad de un activo incorpora la noción de Rentabilidad. El primer paso que se dio, fue el de aproximar esa variabilidad a la varianza de una distribución de probabilidad, en este caso la distribución normal. Así, si se considera que la rentabilidad de un activo se distribuye normalmente, las únicas cosas que se tiene que saber para modelar el riesgo de dicho activo son su rentabilidad esperada y el conjunto de posibles resultados. El riesgo queda pues definido como la varianza de su distribución de probabilidad.

Hasta la aparición de la Moderna Teoría del Portafolio desarrollada por Markowitz [24] el problema de la determinación de una cartera óptima de valores se había resuelto adoptando el criterio de maximización del rendimiento esperado. Harry Markowitz (Premio Nobel de Economía de 1990), en cambio, llamó la atención sobre la varianza de los rendimientos, afirmando que la cartera óptima es aquella que ofrece el mayor rendimiento para cada nivel de riesgo. Ésta teoría sustenta que la composición de una cartera óptima de inversión supone más que una combinación deseable entre el riesgo y la ganancia de los activos que la pueden componer, lo más importante es realizar un análisis meticuloso de la relación entre ellos.

La teoría de la selección de cartera explora además cómo los inversionistas construyen carteras para optimizar el riesgo contra los rendimientos esperados, es decir, mide cómo la cartera de un inversionista puede beneficiarse por medio de la diversificación.

La diversificación de Markowitz se sustenta en la combinación de activos que tengan una correlación menos que perfecta para reducir el riesgo de la cartera sin sacrificar la rentabilidad. En general, cuanto menor sea la correlación existente entre los valores de la cartera medida por la covarianza o el coeficiente de correlación, menor será el riesgo.

XIII

La contribución de un activo al riesgo de un portafolio la mide su covarianza con el resto de activos en el portafolio y no su varianza. Este resultado es muy importante porque sugiere a los inversores lo que deben hacer: Invertir en activos con baja (negativa sería ideal) correlación para así disminuir el riesgo total del portafolio.

Para tal fin, el método de la Media-Varianza resulta una valiosa herramienta cuantitativa que permite realizar una adecuada distribución de las carteras de inversión, esto se logra con la determinación de la frontera eficiente, es decir, el conjunto de combinaciones de activos que maximizan la ganancia esperada para un nivel determinado de riesgo o bien minimizan el riesgo soportado para un nivel determinado de ganancia esperada.

Este trabajo de investigación se centra en la aplicación de los fundamentos de la *INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES*, como es el caso de la *Programación No Lineal*, empleando información de los activos que cotizan en la Bolsa de Valores de Lima.

El objetivo del presente trabajo es proponer una metodología objetiva en base a la aplicación del modelo de Markowitz : Media – Varianza, para la generación de la frontera eficiente que permita determinar carteras de inversión óptimas para inversionistas adversos, moderados y amantes del riesgo, en resumida cuenta, obtener un apropiado rendimiento, optimizando algunos indicadores de riesgo.

Se adicionan además técnicas estadísticas para determinar la composición de dichas carteras lo que ofrece mayor alcance y funcionalidad al modelo clásico de Markowitz.

Otra de las razones que impulsan este trabajo es la ausencia de investigaciones sobre la materia en el PERÚ, lo que hace necesario poner la primera piedra para las futuras generaciones o investigadores que se interesen o profundicen sobre el tema.

El capítulo I, define el marco metodológico de la investigación, la que sustenta la base principal del planteamiento del problema, señalado.

El problema de cartera surge en vista de que la tasa de rendimiento calculada para los valores variará a través del tiempo en forma irreversible. Cada valor mobiliario en el mercado presenta al inversor una diferente combinación de rendimiento y riesgo. La solución de este problema requiere de un modelo gestor para la toma de decisiones de inversión. Uno de los principales modelos de selección de cartera es el propuesto por Harry Markowitz el cual representa un instrumento importante que explica el comportamiento del inversor para la selección de carteras óptimas.

En el capítulo II, se caracteriza la importancia del mercado de valores donde concurren tanto las empresas que necesitan recursos como los inversores que tienen disponibles esos recursos. Para el efecto, se utiliza la teoría del Portafolio como un procedimiento apropiado para orientar las formas de selección de una determinada alternativa de inversión que sea más conveniente, de manera que satisfaga las condiciones que maximicen el bienestar presente y futuro del inversionista.

En el capítulo III, se define la importancia del modelo de Markowitz, como herramienta para determinar una composición de carteras de inversión que proporcione el mayor rendimiento a pesar del riesgo que debe afrontarse. Demostrándose que las inversiones más rentables suelen llevar asociado un mayor riesgo, que aquellas inversiones menos arriesgadas producirán menor rentabilidad. Con este modelo buscamos el equilibrio entre estos dos factores: riesgo y rendimiento. A este modelo se le conoce como modelo de inversión Media- Varianza. Sharpe (1963) propone el denominado Modelo diagonal o de mercado. Este supone que las relaciones entre las rentabilidades de los diferentes títulos se deben únicamente a la relación que todos tienen con un índice de mercado. Esto lo propone Sharpe para simplificar el modelo de cartera de Markowitz.

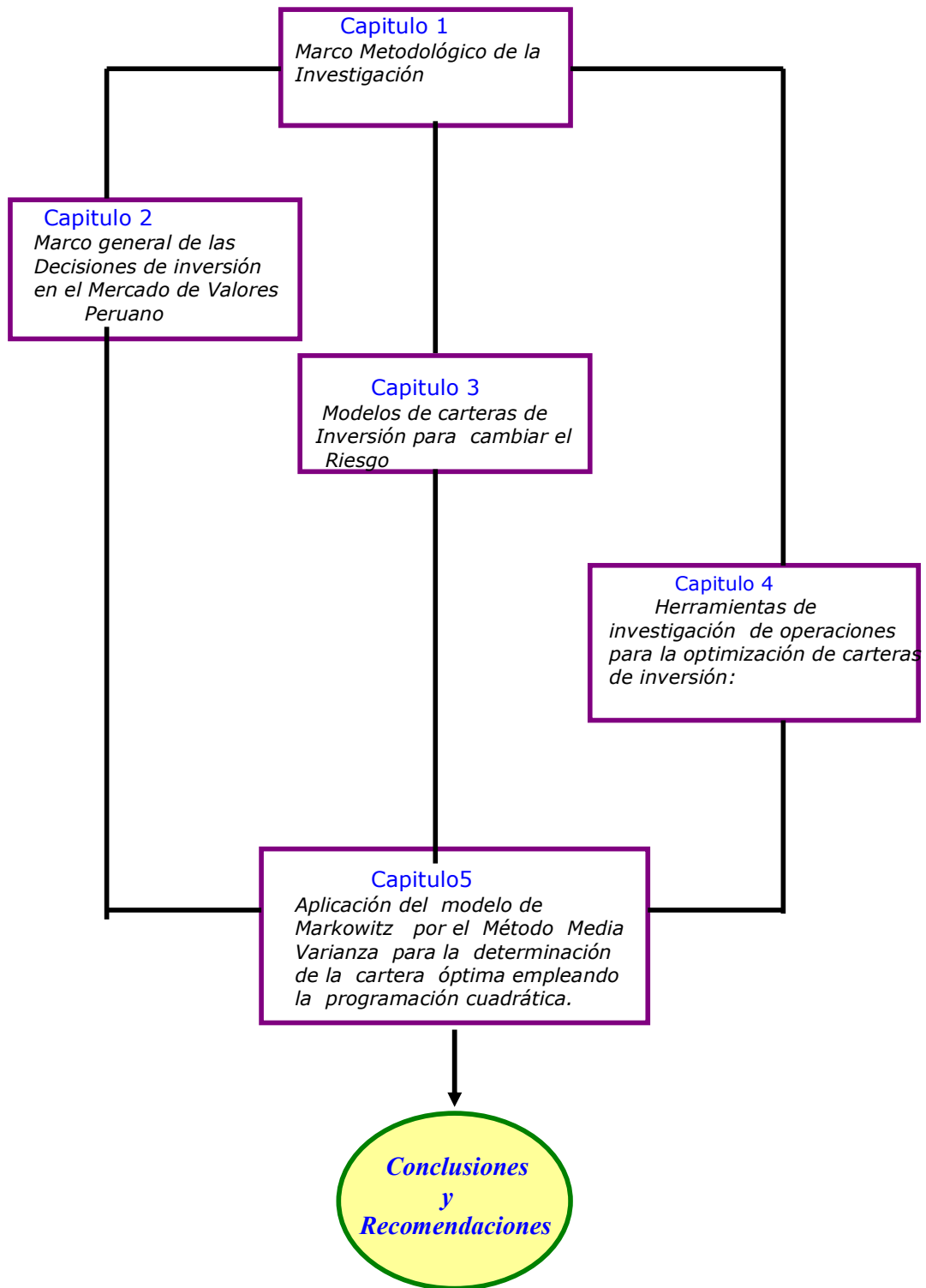
En el capítulo IV, se define las herramientas de la Investigación de Operaciones para determinar la optimización de las carteras de inversión. Una de ellas es la denominada *Optimización Media-Varianza*, que es una herramienta cuantitativa que permite realizar esta asignación considerando el intercambio entre la rentabilidad y el riesgo. Esto se realiza mediante la determinación de la frontera eficiente, es decir, el conjunto de combinaciones de activos que minimizan el riesgo que se debe asumir para un nivel determinado de rentabilidad esperada. Para hallar la frontera eficiente, se propone un problema de programación matemática no lineal, específicamente un problema de Programación Cuadrática.

En el capítulo V, se utilizan las herramientas de Investigación de Operaciones, específicamente la Programación no Lineal presentadas en el capítulo anterior, con el propósito de obtener resultados esperados en cuanto a su rendimiento y riesgo

Una vez definido el modelo de programación no lineal, para su ejecución nos valdremos de instrumentos estadísticos y modelos matriciales, con la finalidad de estimar cambios en el tamaño de la población a largo plazo del periodo en estudio e identificar sus tasas de riesgo que determinan en su mayoría estos cambios.

Finalmente, se demuestra que el modelo de Markowitz es de gran utilidad en la práctica, capaz de proporcionar carteras que nos ofrezcan una mayor rentabilidad y un menor riesgo dentro del Mercado de Valores Peruano.

Siguiendo la línea iniciada en este trabajo de investigación, se presenta a continuación la *ESTRUCTURA DE TRABAJO* .cuya relación puede comprobarse en el siguiente esquema.



CAPITULO I

MARCO METODOLÓGICO DE LA INVESTIGACIÓN

1. PLANEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Problema Principal

En la actualidad, debido a los problemas estructurales y económicos, algunas empresas industriales y en especial las pequeñas y medianas empresas vienen atravesando grandes dificultades, no solamente de recursos monetarios sino también en la actividad productiva, originando desaciertos en las políticas y oportunidades de inversión e influyendo en la toma de sus decisiones.

En el mercado podemos encontrar diversas alternativas de inversión y todo inversionista debe estar consciente de la relación directa que existe entre rendimiento y riesgo, es decir, a mayor riesgo se obtendrá posiblemente mayor rendimiento, de esta manera, si una persona decide invertir su dinero en el mercado resultaría muy riesgoso invertir en un solo instrumento, ya que estaría jugando el todo por el todo, es por eso que para diversificar el riesgo se conforma lo que se conoce como portafolio de inversión, que es una combinación de activos financieros de diferentes emisores, rentabilidades, riesgos, plazos de vencimiento, entre otros.

Todo inversionista debe considerar algunas características de los activos antes de incluirlos en las carteras: Liquidez (posibilidad de transformar el activo en dinero al plazo de vencimiento), Seguridad (con qué certeza recibirá su capital e intereses al final del plazo.) y Rentabilidad (ganancia que se obtendrá por invertir una cantidad de dinero al comprar un activo).

El problema que se plantea es crucial si el objetivo del inversor es el de mantener gran expectativa respecto a sus beneficios futuros libres de riesgo. Sin embargo, dos componentes del riesgo se encuentran asociados a sus inversiones.

Uno de estos componentes se refiere al riesgo que ocurre a causa de la relación existente entre el rendimiento de la inversión y el índice del mercado.

A pesar de estas restricciones es obvio que el inversionista no evalúa el riesgo de un valor de acuerdo con el riesgo que aporta su cartera. Más aun, si una cartera está compuesta totalmente por acciones, el inversor no puede cubrirse con éxito de todos los riesgos (tasas de interés, tendencias cambiantes del mercado financiero, etc.) que están presentes en todas las acciones.

El problema de cartera surge en vista de que la tasa de rendimiento calculada para los valores variará a través del tiempo en forma irreversible. Cada valor mobiliario en el mercado presenta al inversor una diferente combinación de rendimiento y riesgo.

Desde ese punto de vista podemos establecer que existen dos problemas a los cuales nos enfrentamos al formar una cartera de inversión, el primero es determinar cuáles son los instrumentos que debemos comprar para conformar la cartera, y el segundo, qué porcentaje de cada activo se debe tener. La finalidad de los portafolios es encontrar la mezcla ideal de activos que minimicen el riesgo obteniendo los mejores rendimientos

Definido el problema de cartera, en un sentido muy específico, debe tenerse en cuenta que la selección de las acciones requiere de una exitosa diversificación que logre una selección óptima de las inversiones para el inversor.

La solución de este problema requiere de un modelo gestor para la toma de decisiones de inversión. Uno de los principales modelos de selección de cartera es el propuesto por Harry Markowitz el cual representa un instrumento importante que explica el comportamiento del inversor para la selección de carteras óptimas.

Para desarrollar este análisis se sugiere dos pasos. **En primer lugar**, se debe formar un conjunto de carteras eficientes y en **segundo lugar**, se selecciona del conjunto eficiente la cartera que ofrece al inversor la combinación más adecuada de riesgo y rentabilidad.

Como es evidente, la **rentabilidad es una variable deseada** por el inversor financiero que deseará **maximizarla**. Esto implica que el decisor intentará que el valor actual de los rendimientos futuros esperados tenga el mayor valor posible. Sin embargo, las variaciones de estas rentabilidades suponen un componente de **riesgo** que, **no será deseado** por el inversor.

De este modo, el *planteamiento de este trabajo de tesis* se centra en demostrar cómo, a partir de las expectativas que se crean sobre las rentabilidades esperadas de los activos financieros individuales, se puede realizar una correcta elección de la cartera. En este sentido, se trata de conseguir un **modelo óptimo de selección de carteras**, empleando las herramientas de la **INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES** para la optimización de carteras de inversión, determinar las eficiencias de los portafolios a pesar del riesgo, pero analizados bajo el enfoque de la programación matemática no lineal. Para hallar la cartera y frontera eficiente se propone específicamente un problema de programación cuadrática.

Este análisis permite evaluar dentro del mercado de valores aquellos portafolios que vienen mostrando un comportamiento de inversiones arriesgadas y, de acuerdo a ello, presentar una propuesta que consiga optimizar el conjunto de combinaciones de activos que minimizan el riesgo a un nivel de ganancia esperada.

En este trabajo de investigación se pretende contestar las siguientes cuestiones:

- ¿Se puede determinar con cierto grado de confianza el rendimiento de una acción en el Mercado de Valores Peruano?
- ¿Cómo podemos medir el riesgo de la cartera?,
- ¿Cuáles son las ventajas favorables de los modelos de Markowitz y de Sharpe para determinar la llamada *cartera óptima*, que es aquella que permite la mejor combinación de rentabilidad-riesgo dentro de los activos disponibles en el mercado?
- ¿Qué determina el rendimiento esperado de un activo?
- ¿Qué efectos de la diversificación del riesgo afectan el rendimiento de una acción?

Estas interrogantes llevan a la **conclusión** de que el decisor financiero valorará mucho la posibilidad de obtener un determinado nivel de rentabilidad cuando éste sea lo bastante estable en el tiempo.

1.2 Limitantes

1.2.1 Teórica.

Carencia de trabajos de Investigación y bibliografía específica:

De la investigación preliminar; realizada en bibliotecas físicas y virtuales de Universidades, se ha determinado que no existen trabajos relacionados directamente con la aplicación de modelo de Programación No Lineal para determinar carteras óptimas de inversión o al menos temas afines. Tampoco existe bibliografía específica del tema a investigar.

Renuencia de parte de propietarios, accionistas, funcionarios a proporcionar información real sobre la situación financiera, y económica:

1.2.2 Temporal

Este trabajo de investigación se realizó entre el mes de Junio-2006 y Enero de 2007. Período, requerido para el análisis y las pruebas computacionales realizadas para obtener resultados de acuerdo a las expectativas del investigador. No se posee ningún financiamiento de entidades para la elaboración de este trabajo de investigación.

1.2.3 Espacial

Los datos financieros que se emplearán corresponden a empresas accionarias de mayor influencia en el mercado de valores peruano.

1.3 Interrogantes

1.3.1 General

¿La aplicación del método Media- Varianza de Markowitz produce resultados favorables para la selección óptima de carteras de inversión en condiciones de riesgo?

1.3.2 Especifico

¿Cuáles son las ventajas de la programación cuadrática en el caso que se desea minimizar el riesgo para una ganancia esperada?

1.4 Objetivo General

Proponer el Modelo de Markowitz para la determinación óptima de carteras de inversión, sobre la base del comportamiento racional del inversor, garantizando su máxima rentabilidad en condiciones de riesgo, bajo el enfoque de la Programación No Lineal

1.4.1 Objetivo Especifico

Analizar las características y funcionamiento del Mercado de Valores Peruano. Determinar la aplicabilidad del Modelo de Markowitz para la selección óptima de carteras de inversión frente al riesgo.

Conocer la valuación del modelo de Sharpe – CAPM que ofrezca al inversionista la combinación más adecuada de riesgo y rentabilidad sobre el mercado de capitales.

Determinar los efectos de la diversificación frente a rendimientos futuros y riesgos probables de las carteras de inversión y, como consecuencia, del conjunto de carteras eficientes.

1.5 Justificación del estudio

El principal motivo por el que se desarrolla el presente trabajo de investigación, es que en nuestro medio no existen estudios sobre el tema, específicamente orientado al desarrollo de metodologías para el empleo de modelos de optimización en carteras de inversión, a pesar de las alternativas de inversión que ofrece el mercado de valores y obviamente del sistema financiero.

Desde el punto de vista de la *teoría del riesgo* nuestro trabajo se ha centrado, en *primer lugar*, en identificar el problema que padecen los inversionistas en cuanto al rendimiento de sus acciones considerando los niveles de riesgo que asumen en sus oportunidades de inversión; en segundo lugar emplear

modelos de programación no lineal , para obtener el conocimiento y las técnicas de evaluación de las carteras de inversión , así como los diversos instrumentos que podemos encontrar en el Mercado de Valores Peruano , que conduzcan a elegir con mayor seguridad la cartera eficiente y esperada por el inversionista.

Dado que la preocupación principal del inversionista es asignar de manera óptima sus capitales entre las diferentes opciones, en este caso se tendrá una gama de activos existentes que cotizan en la Bolsa de Valores y como función objetivo se tendrá que minimizar el riesgo de la cartera, medido por la varianza de los precios de las acciones en la misma, sujeta a un nivel esperado de rendimientos finales.

En este contexto, el aporte profesional que realizaremos a través de este trabajo de investigación servirá de guía de gestión para los directivos e inversionistas de las empresas productivas. Con este documento estarán en mejores condiciones para gestionar o estimar posibles estadísticas de riesgo en que se incurre cuando se espera alcanzar en el tiempo un nivel dado de rentabilidad.

Finalmente, es necesario manifestar que no se cuenta con antecedentes informativos y/o estudios rigurosos respecto al tema investigado a nivel de la experiencia peruana. Sin embargo, nos basaremos en datos obtenidos de la Bolsa de Valores con la que se van a derivar resultados que sirvan de base en la determinación de las carteras eficientes, para lo cual se empleará la experiencia de otros países, como es el caso de México, Venezuela y España.

Este enfoque brindará un mayor conocimiento del mercado, así como bases y puntos de partida para futuras investigaciones.

1.6 Marco teórico y conceptual de referencia

1.6.1 Marco Referencial

El Mercado de Valores Peruano constituye un medio valioso para el fomento de la inversión privada, por tanto no se debe limitar el ámbito de este en aquellos valores que sin ser transados en Rueda de Bolsa sean susceptibles de formar parte de la cartera de inversiones, siempre que cuenten con clasificaciones de riesgos oportunas y una adecuada publicidad.

El campo empresarial de Lima y Callao está constituido por 16,760 empresas entre pequeñas, medianas y grandes. De este total sólo 8,573 empresas se encuentran supervisadas por la CONASEV en el departamento de Lima, de las cuales sólo 225 empresas, equivalente al 2% del universo empresarial, se encuentran inscritas en la Bolsa de Valores de Lima. Es ahí donde existe una gran capacidad de expansión para que otras empresas formen parte del mercado, situación que podría incentivar la generación de fondos mutuos. Mas aún si consideramos que en Lima y Callao se concentran el 90% de las empresas de servicios, comerciales, crediticias, financieras y administrativas. Asimismo, en este ámbito se genera el 43% del PBI, el 75% de la producción industrial y el 80% de la inversión privada.

Por otro lado, esta situación tendrá un efecto colateral en cuanto muchas empresas que por diversos motivos no forman parte del mercado de valores se sientan incentivadas a integrarse, más aún si consideramos la internacionalización que viene registrando el Mercado de Valores Peruano.

Es por ello, que la CONASEV debe cumplir una función importante de control y supervisión del mercado. Una de sus tareas fundamentales es reducir el costo para los inversionistas, de acceder a información relevante, oportuna y confiable sobre la performance de los fondos mutuos. En este sentido, la nueva regulación del mercado de valores, que incluye disposiciones sobre transparencia y oportunidad en la información a suministrar por las sociedades administradoras es conveniente pero debe ser ampliada. En este contexto, existe información importante que no es suministrada actualmente al mercado y cuya introducción

convendría incorporar por ejemplo, información periódica sobre el riesgo de la cartera de cada fondo (beta), a fin de que pueda determinar con mayor precisión la política de inversiones de cartera de cada fondo y los cambios en ella. Actualmente no se mide esta beta, sino que se controla que la sociedad administradora no invierta el dinero de sus inversionistas en activos de alto riesgo, olvidando que el riesgo del portafolio no es igual a la suma de los riesgos de cada activo en particular, sino un índice de correlación entre todos ellos.

Existen dos componentes para evaluar el riesgo en los fondos: i) riesgo de mercado y ii) riesgo crediticio y calidad de la administración.

El análisis de riesgo de mercado está relacionado con la sensibilidad relativa del Fondo ante cambios en las tasas de interés y otras condiciones de mercado.

A Diciembre 2003, el portafolio estuvo concentrado en instrumentos de renta fija emitidos a mediano y largo plazo con vencimientos que van hasta el 2017; sin embargo, la duración del mismo es de 3.9 años, inferior al plazo que resta al vencimiento del Fondo.

Así también, se ha establecido mantener, como mínimo, el 40% del portafolio en inversiones líquidas, es decir, en aquellos instrumentos que se pueden realizar por lo menos en un plazo no mayor a un mes. Al cierre del 2003, el 20.3% del Fondo se encontraba en caja o en depósitos bancarios y las inversiones contaban con buenos indicadores de liquidez.

El análisis del riesgo crediticio se basa en varios factores que incluyen: calidad crediticia, el tamaño del portafolio, la diversificación de los activos, la fuerza administrativa y la capacidad operacional y controladora. En la calidad crediticia se toma en cuenta las calificaciones de los instrumentos que ha comprado el Fondo y que forman su portafolio de inversiones. Una vez que todos los valores de la cartera del portafolio tienen una calificación asignada, se procede a determinar la probabilidad de incumplimiento del portafolio, la cual es una opinión sobre la calidad crediticia como un todo. Para ello, se utiliza un modelo cuantitativo

evaluando la probabilidad de que cada valor del portafolio pueda incumplir en el pago de capital y/o intereses ante situaciones extremas y, con ello, afectar el patrimonio de las inversiones.

1.6.2 Marco teórico

El marco teórico de este trabajo de investigación se enmarca en los siguientes fundamentos:

Según **Samuelson**. [35] en la teoría de la economía de mercado el riesgo tiene una importancia fundamental, ya que representa la justificación de la tendencia del capital por las empresas privadas y públicas. El argumento es que las utilidades obtenidas por las llamadas empresas de éxito son justas, debido a que la empresa y no el trabajador ni el gobierno absorben los riesgos. Mientras más riesgosa sea una empresa, mayores deberán ser las utilidades a que tiene derecho el empresario en caso de éxito.

De acuerdo con este fundamento, la consideración del factor riesgo en las decisiones empresariales se hace necesario por dos motivos:

- a. Es evidente que no se conoce el resultado del evento futuro
- b. La probabilidad de que ciertos eventos o circunstancias futuras, y la medida en que pueden ocurrir afectan de manera general a las distintas alternativas de acción abierta al que toma la decisión.

En los últimos tiempos se ideó un nuevo enfoque que analiza los riesgos bajo la perspectiva de unas carteras de inversiones. En él se tomaron dos argumentos: *el primero*, indica la relación entre un inversionista individual y otros activos existentes u otras oportunidades de inversión. Como su nombre lo indica, representa el conjunto de alternativas de inversión que son objeto de la elección. Un *segundo* argumento es definir la estructura de preferencias. Es obvio que este es un problema muy complejo, sobre todo cuando la elección es a título personal, para algún individuo. Sus preferencias estarían determinadas por elementos que son muy difíciles de caracterizar como educación, personalidad, etc.

El hecho anterior supone que, si la empresa realiza más de una inversión, la selección óptima de inversiones debe basarse en una evaluación de todas las combinaciones de inversión, más que en la evaluación individual de estas, es evidente que la empresa debe comparar el riesgo y la rentabilidad de cada combinación de inversiones, si los proyectos considerados son dependientes o si su capital está racionado.

Una consecuencia directa del riesgo es la “diversificación de la cartera”, es decir, distribuir el riesgo entre varios activos, de tal manera que las pérdidas en algunos sean compensadas y aún superados con las ganancias en otros.

El modelo clásico para explicar la diversificación de la cartera es el expuesto por Tobin [38]. De acuerdo con este modelo, la incertidumbre obliga a una diversificación de la cartera para distribuir el riesgo entre los diferentes activos, pero que la diversificación depende de la actitud particular del inversionista en cuanto al riesgo.

Por otra parte, es importante señalar el problema que ocasiona la incertidumbre en el “requisito de liquidez”, afectando la compensación de la cartera y obligando a una diversificación por características de liquidez más que por rendimiento.

Si existiera un conjunto eficiente de combinaciones de cartera cabría preguntarnos ahora, ¿qué cartera debe escoger un inversionista? Para determinar esto, se debe conocer su actitud hacia el riesgo o la función equivalente del riesgo - rendimiento.

Para apreciar el nivel de riesgo de una inversión de capital debe tomarse en cuenta, no solo la variación de los rendimientos esperados del proyecto, sino también la correlación entre ellos y el resto del activo. A dicha relación se le llama “*efecto de cartera*”. Ahora, si los efectos de cartera son favorables entonces serán

mas fuertes cuando un proyecto esté correlacionado negativamente con los otros activos de la empresa, y serán más débiles cuando exista correlación positiva.

En cuanto a la evaluación de los criterios de inversión hay métodos y modelos para seleccionar carteras óptimas mediante las cuales se tiende a convertir la incertidumbre en riesgos calculados. Entre estos modelos podemos señalar:

- El modelo de selección de cartera de **Markowitz**, quien propuso de manera específica el empleo de la varianza de los rendimientos esperados como la medida de riesgo. Este modelo es un instrumento que sirve para explicar el comportamiento del inversor que se encuentra presionado por dos fuerzas opuestas: aspirar ganancias y la insatisfacción que le produce el riesgo.

Michaud [29] señala una serie de ventajas que tiene la utilización de una técnica de optimización como el modelo de Markowitz: satisfacción de los objetivos y restricciones de los inversores, control de la exposición de la cartera al riesgo, establecimiento de un estilo de inversión, uso eficiente de la información.

Markowitz [24] desarrolla su modelo sobre la base del comportamiento racional del inversor. Es decir, el inversor desea la rentabilidad y rechaza el riesgo. Por lo tanto, una cartera será eficiente si proporciona la máxima rentabilidad posible para un riesgo dado o, de forma equivalente, si presenta el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad.

El modelo de mercado desarrollado por **William Sharpe [47]** propone un proceso más simplificado que el de Markowitz. La idea en que se basa este modelo es, que se admite como hipótesis, que una rentabilidad asociada a cada una de las acciones está linealmente relacionada con un nivel de índice general o de acuerdo al nivel de mercado como un todo. El modelo de mercado descompone la variabilidad total de las cotizaciones de una acción en dos partes:

1. Una parte, debido a la influencias del mercado, es el riesgo sistemático.

2. La otra parte, debida a las características específicas de la acción, es lo que se llama riesgo diversificado o específico.

Otro de los modelos importantes de selección de carteras son los formulados por **H. Martín Weingartner [40]** sobre el modelo de programación cuadrática con enteros; y el modelo de la teoría de decisión elaborada por **R.M. Adelson [1]**. Ambos modelos emplean esencialmente el enfoque equivalente de la certidumbre para juzgar el riesgo. Pero, la diferencia radica en que el modelo de Weingartner escoge sus inversiones sobre la base del valor esperado y la variancia de sus VAN (Valor Actual Neto) combinados, mientras que el modelo de Adelson elige sus inversiones sobre la base de la función de utilidad de la empresa.

Por consiguiente, el empleo de los modelos de decisión de inversión tenderán a reducir la posibilidad de error y convertir la incertidumbre en riesgos calculados, lográndose mantener a los inversionistas a las expectativas que les ofrecerá su cartera de inversión, en cuanto a rendimientos futuros y a la posibilidad de elevar la productividad y expansión de su economía.

1.6.3 Marco conceptual

Acción

Cada una de las partes en que se encuentra dividido un capital social. Título que representa los derechos de un socio sobre una parte del capital de una empresa organizada en forma de sociedad. Las acciones pueden ser nominativas o al portador, ordinarias o preferentes.

Activo de renta variable

Se refiere a las acciones y a diferencia de los activos de renta fija, en estos no se conoce de antemano la ganancia que se va a obtener, ni siquiera si ésta se producirá.

Aversión al riesgo

Es la posición de un inversor que no desea someter sus inversiones financieras a altos riesgos, por lo que sus inversiones serán muy selectivas considerando siempre la eliminación del riesgo aunque alcance una menor rentabilidad.

Análisis financiero

Conjunto de técnicas encaminadas al estudio de las inversiones con un enfoque científico. El interés que pueda ofrecer una inversión se analiza utilizando conjuntamente las técnicas que ofrecen el análisis de balances, la matemática financiera, los métodos estadísticos y los modelos econométricos.

Acción en cartera

Es aquella acción que no ha sido suscrita por persona alguna y, por tanto, no ha sido puesta en circulación al tiempo de constituirse la sociedad, reservándose como un fondo de maniobra para su colocación por los administradores de la sociedad sin cumplir los requisitos exigibles al aumento del capital.

Análisis bursátil

Conjunto de técnicas que sirven de base para la adopción de decisiones respecto al mercado de valores. Su objetivo es la formulación de hipótesis sobre el funcionamiento de este mercado o de un determinado valor del mismo.

Existen dos características:

De un lado, el análisis técnico que trata de explicar el precio de un valor en base a modelos de comportamiento, mediante la aplicación de la Estadística, usando como instrumentos de trabajo, los índices de bolsa, volúmenes de contratación, gráficos, etc.

· De otro lado, el análisis fundamental que parte del principio de que la cotización de las acciones depende de la realidad económico-financiera de la empresa.

Autofinanciación

Forma de financiar las inversiones caracterizadas por la utilización en exclusiva de los recursos internos de una sociedad, sin acudir al crédito o al préstamo de recursos ajenos.

Beta

Indicador de riesgo. Marca en qué medida una acción sigue las fluctuaciones del mercado. Cuando el valor de Beta es mayor de 1 ($\beta > 1$) mayor es el riesgo.

Bolsa

Mercado financiero en donde se compran y venden acciones, obligaciones, bonos y otros activos financieros, a través de intermediarios financieros que reciben el nombre de brokers. También se la conoce como Bolsa de Valores o Bolsa de Comercio

Capitalización bursátil

Es el valor del capital de una sociedad obtenido a partir de su cotización en bolsa. Se obtiene multiplicando la cotización de sus acciones por el número de las mismas. Este mismo cálculo se puede realizar para todo el mercado, sumando la capitalización de todas las sociedades que componen el mercado.

Cartera de valores

Es el conjunto de títulos que posee una persona o una entidad como inversión financiera

Corredor de bolsa

Antiguo mediador financiero en bolsa. En la actualidad han sido sustituidos por las Sociedades de Bolsa y las Agencias de Bolsa.

Capital de riesgo

Fondos que un inversionista coloca en empresas, transacciones o instrumentos de alto riesgo, para lograr sobre los mismos un rendimiento mayor que el corriente.

Capitalización bursátil.

Valor de mercado de una empresa según la cotización de sus acciones en el mercado, por el número de acciones.

Costos de transacción

Mientras mayores sean esos costos, mayor también deberá ser el monto de la emisión. Esto quiere decir que sólo pueden acceder al mercado de valores aquellas empresas que estén en condiciones de asumir ese costo de transacción sin que la rentabilidad de su oferta pierda atractivo para el inversor. En la actualidad los costos de transacción en el Mercado de Valores Peruano sólo justifican emisiones mayores a US\$ 10 millones (para empresas que ofrecen un riesgo conservador), lo cual limita el acceso de empresas medianas y pequeñas.

Diversificación:

Confección de una determinada cartera de valores, con títulos y países que no tengan relación entre sí, buscando que un posible descenso en los precios en alguno de ellos, no produzca consecuencias sobre el resto de los valores de la cartera.

Dividendo en acciones:

Es el pago de dividendos en forma de acciones a los propietarios existentes.

Las empresas recurren a menudo a este tipo de dividendo como una forma de reemplazo en efectivo.

Fondos de inversión

Institución sin personalidad jurídica propia que tiene como objetivo la propiedad comunitaria de unos activos con finalidad de lucro. Existe una sociedad gestora que es la encargada de administrar el fondo y una entidad depositaria que se encarga de custodiar sus activos. A todas aquellas personas que forman parte del fondo se les da el nombre de partícipes.

Finanzas

Es la parte de la economía que se encarga del estudio de los mercados del dinero y de capitales, de las instituciones y participantes que en ellos intervienen, así como de las políticas de capitalización de recursos y de distribución de resultados, el estudio del valor temporal del dinero, la teoría del interés y el coste del capital.

Gestión de cartera.

Acciones gerenciales ejercidas sobre las acciones y valores que componen la cartera de un inversionista individual o grupo.

Gestión financiera

Conjunto de técnicas, análisis y previsiones que tratan de conseguir los mejores medios de financiación para las empresas.

Ibex 35

Es el primer **índice** de las bolsas españolas y se compone de los 35 títulos de mayor capitalización bursátil del mercado continuo. Se revisa cada seis meses y es un índice ponderado.

Índice de Bolsa

Índice ponderado con respecto al volumen de contratación de las cotizaciones de los principales títulos cotizados en una Bolsa de Valores, indica la subida o

bajada de la cotización global. Para una misma bolsa puede haber diferentes índices según su ponderación. Por ejemplo: IBEX 35, IGBM, MID 50, etc.

Informe Bursátil

Informe sobre una Bolsa de Valores en general, sobre alguna sociedad que cotiza en bolsa, preparado por una empresa especializada o por un experto bursátil. Generalmente incluye un pronóstico sobre la bolsa o la sociedad analizada.

Inversión de cartera

Inversión en acciones de una sociedad con un objetivo de rentabilidad y sin interés en el control de la sociedad.

Inversión

Compra o venta de activos financieros para obtener beneficios en forma de plusvalías, dividendos o intereses.

Liquidez

Dinero en efectivo o en futuros activos financieros fácilmente convertibles en dinero. Es una de las características que definen una inversión junto con la seguridad y la rentabilidad

Mercado bursátil

Mercado primario y secundario de compraventa y emisión de valores de renta fija y renta variable.

Mercado de capitales

Conjunto de los mercados financieros de acciones, obligaciones y otros títulos de renta fija o variable. Se excluyen los activos monetarios que forman el mercado de dinero

Mercado financiero

Conjunto de mercados formado por el mercado de capitales, el mercado de dinero y el mercado de divisas. En ellos se opera al contado y a plazo (opciones y futuros, que son contratos por medio del cual su titular o comprador adquiere el derecho a comprar o vender un activo).

Mercado renta fija

Mercado de capitales en el que se contrata el mercado primario y secundario de renta fija (letras, obligaciones, pagarés, etc.) forma parte del mercado de capitales.

Mercado renta variable

Mercado de capitales en el que se contrata el mercado primario y secundario de renta variable (acciones). Forma parte del mercado de capitales

Mercado de valores

Es un subsistema dentro del sistema financiero y está compuesto por un conjunto de instrumentos o activos financieros, una variada gama de instituciones o intermediarios financieros, cuyo papel principal es poner en contacto a compradores y vendedores en los distintos mercados donde se negocian los diferentes instrumentos o activos financieros.

Mercado primario

Los títulos representativos de deuda o de capital emitidos por las empresas son negociados por primera vez a través de la oferta pública primaria en lo que se conoce como “*mercado primario*”. En efecto, uno de los mecanismos de financiamiento que ofrece el mercado de valores es la posibilidad de emitir títulos – de renta fija o renta variable – para ser ofertados a los inversores y al público en general por primera vez.

Mercado secundario

En el mercado secundario se negocian los valores creados y emitidos en el primario. Estos mercados son necesarios para el primario ya que, de otra manera, nadie acudiría a una ampliación de capital o emisión de obligaciones si no existiese un mercado transparente en el que se pueden vender esos valores cuando se necesite. No supone nueva financiación para las empresas.

Modelo de Markowitz

Es el modelo creado por Markowitz en su obra “Portfolio Selection” que inicialmente puso de relieve la aplicación de cálculos matemáticos a la selección de carteras de inversión. Se basa el modelo en cuantificar el rendimiento y riesgo de una cartera.

Portafolio de inversión.

También llamada cartera de inversión, es un conjunto de activos o valores en el que una persona decide invertir su dinero. Para poder realizar la elección de los activos es necesario conocer los instrumentos existentes en el mercado, así como definir cuál es el riesgo máximo que se está dispuesto a correr y los rendimientos que se pueden obtener.

Precio de cierre

Ultimo precio de compra-venta que se ha hecho de un título en bolsa antes de cerrar la sesión.

Prima de riesgo

Es la Diferencia de tipos de interés de la deuda de un país con respecto a otro. También se llama riesgo-país. Por ejemplo, a mediados del mes de agosto del 2005 el riesgo país de Perú bajó ocho puntos básicos pasando de 1.53 a 1.45 puntos porcentuales, considerado como el nuevo mínimo histórico. Sin embargo, según el EMBI+ Perú calculado por el banco de inversión JP Morgan, el nivel de riesgo país del Perú resulta ligeramente inferior al de México que cerró en 1.49 puntos porcentuales esa fecha.

Producto financiero

Activo financiero creado para su venta a inversores. Es sinónimo de instrumento financiero.

Rendimiento

Porcentaje que resulta de la relación de los ingresos derivados del activo financiero, y su valor de mercado a una fecha determinada. Este concepto permite efectuar un ordenamiento único de los activos financieros.

Riesgo

El riesgo surge como consecuencia de la incertidumbre en el resultado y suele considerarse mediante la probabilidad de conseguir resultados distintos a los esperados dada una posición de partida.

Renta de valores

Rendimiento producido por la tenencia de valores, bien en forma de intereses, dividendos, venta de derechos, primas de asistencia a juntas, primas de amortización.

Rentabilidad

Porcentaje de utilidad o beneficio que rinde un activo durante un período determinado de tiempo. De acuerdo al tipo de rentabilidad podemos encontrar dos tipos de activos: activo de renta fija y de renta variable

Renta fija

Conjunto de activos financieros que tienen una rentabilidad fija (bonos, pagarés, etc.). La renta fija no implica la seguridad de cobro, que depende de la solvencia del emisor.

Renta variable

Expresión genérica que se aplica al mercado de acciones. Se llama así porque la rentabilidad depende del pago variable de los dividendos el cual a su vez depende de los beneficios de la sociedad y de su política de dividendos.

Riesgo financiero.

Incertidumbre en operaciones financieras.

Riesgo sistemático.

Riesgo de que la falta de cumplimiento de sus obligaciones vencidas por parte de un participante en un sistema de transferencias, o en los mercados financieros en general, genere a su vez una incapacidad de hacer frente a sus obligaciones.

Riesgo de Crédito

Es la posibilidad de que se produzcan pérdidas como resultado del incumplimiento de pago de clientes y/o contrapartes con el contrato estipulado. Este riesgo se encuentra no sólo en préstamos sino también en otras exposiciones dentro y fuera del balance como garantías, aceptaciones e inversiones en valores, entre otros.

Riesgo de mercado

Es la factibilidad de que ocurran pérdidas en el valor de las posiciones mantenidas como consecuencia de movimientos adversos en las variables de mercado. Considera los riesgos por tasas de interés, tipo de cambio y precio.

Riesgo de Liquidez

Se manifiesta por la incapacidad de las instituciones financieras para obtener los fondos necesarios, ya sea incrementando los pasivos o convirtiendo activos, para cumplir sus obligaciones en la fecha de vencimiento, sin incurrir en pérdidas inaceptables.

Riesgo Operacional

Es la probabilidad de daños potenciales y pérdidas, motivados por las formas de organización y por la estructura de sus procesos de gestión, debilidades en

los controles internos, errores en el procesamiento de operaciones, fallas de seguridad e inexistencia o desactualización en los planes de contingencia del negocio. También corresponde a este tipo de riesgo la potencialidad de sufrir pérdidas inesperadas por sistemas inadecuados, fallas administrativas, eventos externos, deficiencias en controles internos y sistemas de información, fraudes, incapacidad para responder de manera oportuna o hacer que los intereses de la institución financiera se vean comprometidos de alguna u otra manera.

Riesgo legal

Es la contingencia de pérdida que emana del incumplimiento de las leyes, reglamentos, prácticas o normas de ética.

Sistema financiero

Conjunto de regulaciones, normativas, instrumentos, personas e instituciones que operan y constituyen el **mercado de dinero** y el **mercado de capitales** de un país.

Tasa de rendimiento

Mide los beneficios económicos percibidos por un accionista, por dividendos y por la revaluación (o devaluación) del precio de la acción. Esta puede ser positiva o negativa sobre una acción, para un determinado periodo,

Valor Beta

Parte de la variación de una acción, según la teoría de **cartera de valores**, que está relacionada con el comportamiento del índice bursátil. Una acción con un valor beta elevado subirá más rápidamente que la media de la bolsa cuando el índice suba y viceversa. Se completa con el **valor alfa**.

Valor Alfa.

Parámetro definido en la teoría financiera, que explica la parte de la variación del rendimiento de una acción que no tiene relación con los cambios del índice general del mercado. Se completa con el valor beta

Volatilidad

Medida y grado de oscilación alrededor de un valor medio. Se usa en los mercados financieros para diferenciar los activos financieros estables de los que no lo son.

Valores.

Son los derechos vendidos, pueden ser acciones, sociedades etc.

Valores no negociables.

Son los que encontramos en los mercados como valores tipo depósito, tal como una cuenta de ahorros en un banco.

Valores negociables.

Son los que se puede comprar y vender en la bolsa de valores.

Volatilidad esperada

Es una medida del importe al que se espera fluctúe el precio a lo largo de un determinado periodo. La medida de la volatilidad, usada en los modelos de valoración de opciones es la desviación típica anualizada de las tasas de rendimiento sobre las acciones a lo largo de un periodo de tiempo, calculadas utilizando capitalización continua

2. Hipótesis y Metodología

Para alcanzar los objetivos planteados es necesaria la comprobación de una serie de Hipótesis. Dentro de éstas destacan las relacionadas a la aplicación del modelo Markowitz en la fijación de precio en el mercado de valores, cuyo mecanismo de prueba se presenta en el siguiente esquema:

2.1 Hipótesis

2.1.1 Hipótesis General

Hipótesis General	Método de Prueba
La necesidad de adoptar medidas encaminadas a cambiar los efectos del riesgo en las decisiones de inversión, puede realizarse mediante el modelo de Harry Markowitz como herramienta de selección de carteras óptimas, sobre la base del comportamiento racional del inversor, asegurando su máxima rentabilidad dentro de su clase de riesgo.	Se procede a la aplicación del modelo de Markowitz para la selección óptima de carteras de inversión, considerando el comportamiento racional del inversor de decisiones, de ser así, dicho modelo garantizará el rendimiento esperado rechazando el riesgo. Esta prueba se efectuará con el uso de la Programación no lineal, específicamente la Programación cuadrática, empleando el sistema Excel-Solver para encontrar la Cartera Eficiente.

2.1.2 Hipótesis Específica

Hipótesis Específica	Método de Prueba
H1. El Mercado de Valores Peruano es una Alternativa financiera para el financiamiento de las inversiones	Se efectuará un diagnóstico de su estructura, funcionamiento y transparencia, para precisar su interrelación con todo el sistema financiero nacional, diferenciando el mercado de dinero y el de capitales.
H2. El Modelo de Markowitz , fundamenta el rendimiento de cartera , el riesgo de la cartera y la función de utilidad del inversor, contribuyendo a la optimización de las decisiones de inversiones	Se utilizara la Programación Cuadrática, para formular el modelo de optimización empleando el programa de Excel- Solver, WINQSB, LINGO
H3. El modelo de Sharpe considera la rentabilidad de una cartera, como una variable aleatoria, permitiendo la mejor combinación de rentabilidad-riesgo dentro de los activos disponibles en el mercado.	Se presentará casos para analizar las ventajas de este modelo teniendo en cuenta algunas características sobre el rendimiento libre de riesgo; el premio por el riesgo y el riesgo de mercado.
H4. Los efectos de la diversificación son un medio y alternativa para la reducción de los riesgos no sistemáticos a un nivel arbitrario bajo, debido a las sensibilidades opuestas del mercado ante determinados factores macroeconómicos.	Se demostrará la importancia de la diversificación de carteras comparando los niveles de riesgo, a fin de cuantificar la sensibilidad de las carteras a las principales variables macroeconómicas.

2.2 Metodología de la Investigación

2.1.1 Generales

La metodología desarrollada para alcanzar los objetivos anteriormente citados se ha basado, por una parte, en la revisión de literatura sobre la teoría de carteras de inversión y las características del modelo de Markowitz empleando el método media-varianza, así como también el modelo de Sharpe sobre el CAPM (*Capital Assets Portfolio Model*). Con ello se ha elaborado un modelo a partir del enfoque de la programación no lineal, empleándose los precios de cierre de empresas accionarias de mayor trascendencia dentro del ámbito del mercado bursátil. Por otra, se ha realizado una investigación para contrastar la validez de las hipótesis planteadas a partir de la revisión de la literatura.

Nuestro objetivo es determinar la cartera óptima del conjunto de activos financieros, así como proponer una metodología que sirva de guía para determinar los portafolios eficientes en cuanto a rentabilidad y riesgo.

Como alternativa para los inversionistas, inicialmente se ha examinado la información sobre la características y funcionalidad del Mercado de Valores Peruano, en cuanto a su evolución y regulación del mercado, observándose resultados optimistas durante el año 2005 (gerencia de investigación y desarrollo de CONASEV), tanto en el mercado primario y secundario de valores como en los fondos de inversión y fondos mutuos, pues éste ha sido el elemento testimonial que nos ha permitido manejar información confiable e importante para nuestra investigación.

La validación del modelo de Markowitz y la trascendencia del mercado, se describirán de manera sostenida empleando los principios básicos de la Investigación de Operaciones, técnicas estadísticas, formulaciones financieras, y algunos tópicos de la programación matemática, apoyados por el sistema computarizado.

Por tanto, para interpretar adecuadamente los resultados obtenidos de nuestra investigación, se ha tenido algunos inconvenientes que no han permitido diseñar una encuesta en cuanto a temas de interés financiero propios de las empresas accionarias que fueron seleccionadas para nuestro estudio, ya que muchas de ellas consideran información de tipo confidencial mostrándose renuentes en la entrega de la información requerida (dividendos, aportaciones de capital, cantidad de acciones, cobertura financiera, tasa de rendimiento, etc.), para de esta manera, conocer su desarrollo y perspectivas futuras del sector. Frente a estas limitaciones, se ha utilizado información directa de La Bolsa de Valores de Lima, y CONASEV, con la que hemos concluido esta investigación.

2.2.2 Específicos

El método utilizado en el presente trabajo de investigación es el deductivo, empleando información cuantitativa para su adecuado análisis e interpretación de la misma. Partiremos del estudio de las carteras de inversión centrando nuestro

objetivo principal en el modelo de Markowitz, sobre el rendimiento de carteras de inversión en el Mercado de Valores Peruano, que serán abordados mediante el enfoque de la programación no lineal, estableciendo la relación entre variables de riesgo con el rendimiento.

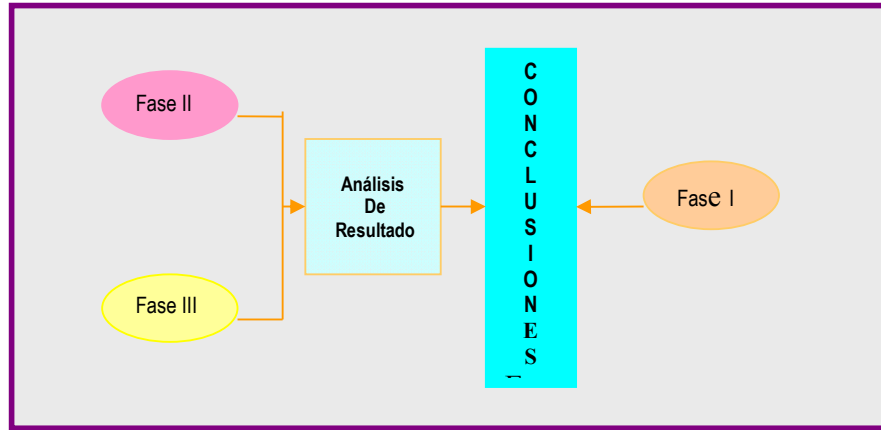
El procedimiento para este trabajo se desarrolla en tres fases. Esta secuencia fue seleccionada de acuerdo al orden cronológico de los objetivos concordantes con las hipótesis.

En la **primera fase** de este trabajo se examina el Mercado de Valores Peruano desde su base conceptual, evolución y regulación, respecto a las alternativas que ofrece al inversionista. Se resalta además los aspectos fundamentales de las decisiones financieras cuando se proyectan inversiones arriesgadas. Continuando con los fundamentos de la teoría moderna de carteras (TMC), se ha dedicado la mayor atención a la teoría de selección de cartera, curvas de indiferencia, a los problemas que generan riesgo e incertidumbre, para determinar la medición del riesgo – rendimiento y los efectos de la diversificación en el riesgo. En ella se muestra y precisa la interrelación que existe entre la rentabilidad de los activos financieros y los niveles de riesgo asumidos, dentro del espectro del mercado de valores peruano.

La **segunda fase** - tiene como objetivo el analizar del modelo de fijación de precios de Markowitz. y el modelo de Sharpe sobre el CAPM (*Capital Assets Portfolio Model*). Siguiendo las condiciones planteadas en este trabajo, nos parece importante el empleo de técnicas estadísticas para determinar la frontera eficiente para la selección óptima de cartera de inversión, teniendo como punto de equilibrio la línea de mercado de capitales. Esta fase comprende la recopilación de información, su validación y el análisis de los resultados obtenidos.

En la **tercera fase**, se prueba el modelo de Markowitz a través del método media-varianza, empleando las herramientas de Investigación de Operaciones, como es el caso de la *programación cuadrática*. Para el efecto, se usarán las técnicas estadísticas: varianza, covarianza comparando el rendimiento de las carteras que han generado el mínimo riesgo para un determinado nivel de ganancia esperada.

Para realizar las estimaciones del riesgo y correlaciones se hace uso del Microsoft Excel. Cabe recalcar que en esta fase se incluye conclusiones y recomendaciones del análisis de resultado obtenido, como se muestra en el siguiente diagrama.



Fuente: Elaboración propia

2.3 Operacionalización de la variable

El trabajo de investigación tiene su base en la operacionalización de las variables e indicadores:

VARIABLE INDEPENDIENTE:

X = Precio de cierre de las acciones

INDICADORES:

- Evolución del mercado de valores peruano
- Rendimiento del mercado
- Tasa de interés del mercado

VARIABLE DEPENDIENTE:

Y = Rentabilidad de las acciones

INDICADORES:

- Perfil del inversionista
- Margen financiero

2.4 Población y muestra

2.4.1 Muestra o tratamientos de los datos

Los datos utilizados son los precios promedio semanales (precios de cierre). Se seleccionó una muestra de 10 empresas accionarias del Mercado de Valores

Peruano. Todas ellas componentes del Índice de Precios y Cotizaciones. Esta muestra contiene empresas de diferentes tamaños y sectores económicos y abarca aproximadamente cerca del 23 por ciento de la población.

Los rendimientos de las acciones que se utilizan como base en el presente trabajo corresponden al periodo de Febrero de 2001 a Junio de 2006, es suficiente para poder establecer los modelos y su posterior análisis. Debido a las variaciones en el rendimiento de las acciones y al comportamiento del inversionista (adverso al riesgo), se considera que el análisis de las variables provocará estas fluctuaciones permitiendo determinar, cuál es su grado de influencia sobre la variable dependiente (rendimiento de la acción o cartera) y, por lo tanto, efectuar un análisis del modelo propuesto, de tal manera que nos ayuden a pronosticar el rendimiento futuro de los activos financieros, en condiciones de riesgo.

Origen de los datos	CONASEV
Periodo de la muestra	Febrero de 2001 a Junio 2006
Criterio de selección	Todos los componentes del Índice de precios, alto índice de bursatilidad. Diversificación sistemática a través de los sectores industriales de mayor trascendencia.
Intervalo de tiempo	Rendimientos de cierre semanal

	Empresas:
1	Minera Atacocha
2	Telefónica del Perú
3	Backus & Johnston
4	Corpor. Aceros Arequipa
5	Edelnor
6	Cartavio SA
7	Southern Perú
8	Luz del Sur
9	Cementos Lima
10	Tuman Agro Industria

2.4.2 Materiales e instrumentos.

- Información bursátil de CONASEV y BOLSA DE VALORES DE LIMA
- Premiun Solver Plataform – WinQsB
- LINGO

CAPITULO II

MARCO GENERAL DE LAS DECISIONES DE INVERSIÓN EN EL MERCADO DE VALORES PERUANO

2.1 Introducción a las decisiones de inversión en el contexto del Mercado de Valores.

Una de las grandes barreras para desarrollar la actividad empresarial en nuestro país es el acceso a fuentes de financiamiento. Esto lo evidencia lo costoso que es el crédito en el Perú, siendo un número menor de empresas que pueden obtener tasas competitivas con el sistema financiero, en comparación con aquellas empresas que pueden financiarse a través del mercado de valores. La gran mayoría de empresas peruanas que acceden a financiamiento bancario deben pagar altas tasas de interés, por lo que su rentabilidad se ve fuertemente afectada.

Esta limitación es más grave aún si consideramos que en un mundo globalizado nuestras empresas deben competir con empresas extranjeras que acceden a financiamiento en condiciones más favorables.

El mercado de valores peruano ha experimentado durante la última década un notable desarrollo, lo que se desprende del comportamiento positivo registrado en sus principales indicadores. Sin embargo, a pesar de los importantes avances en regulación, supervisión y tecnología, el mercado de valores en el Perú aún no se constituye en una efectiva y real alternativa de inversión para los diversos actores de la economía, especialmente la pequeña y mediana empresa. Esta situación únicamente podrá ser revertida con el concurso del Estado y de todos los inversionistas que participan del mercado.

2.1.1 Marco conceptual del mercado de valores.

El mercado de valores, por su carácter público y abierto es un mecanismo efectivo para democratizar el crédito y la inversión. Por esta razón es importante

difundir e informar acerca de sus ventajas, beneficios y riesgos.

El mercado de valores es considerado un mercado financiero alternativo al sistema bancario, debido a que representa una fuente de financiamiento e inversión.

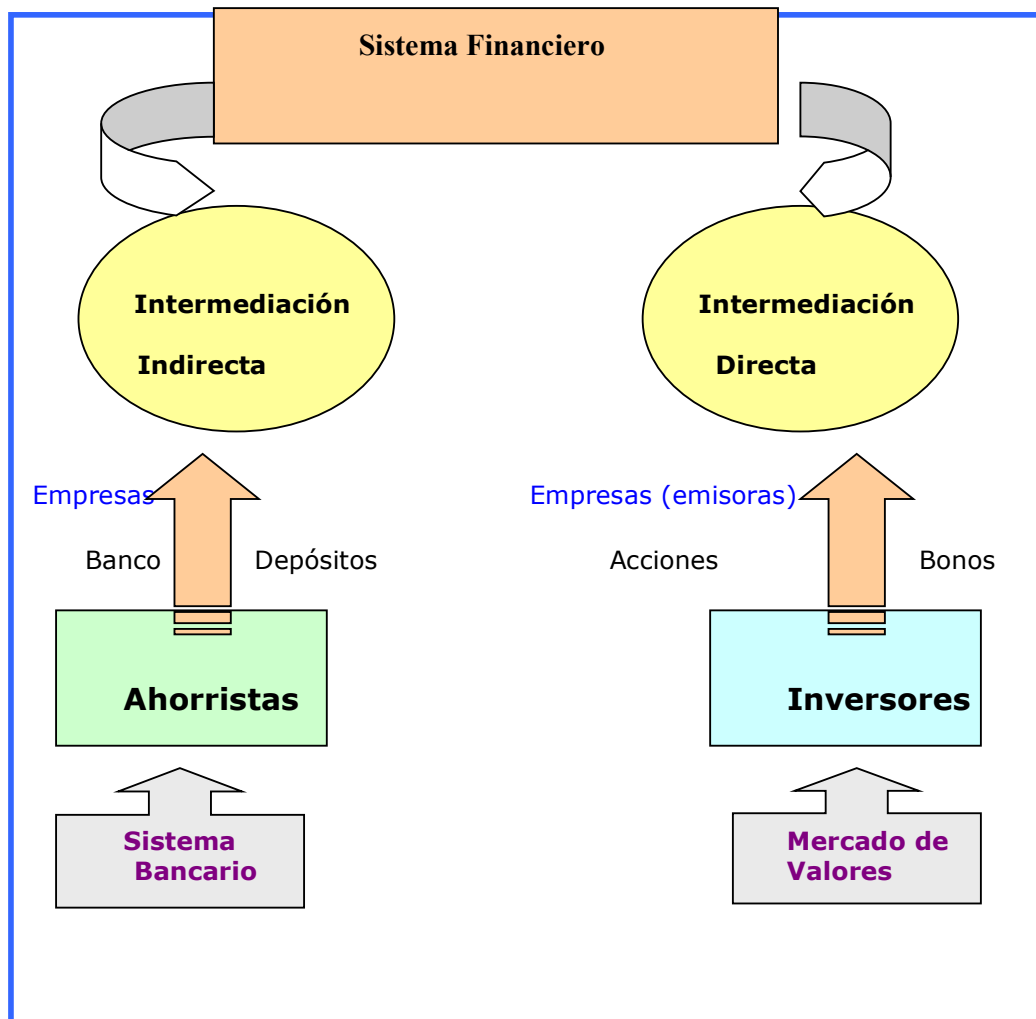
Los mercados financieros facilitan a aquellas personas o empresas que requieren capital, que lo tomen de aquellas que lo tienen disponible. El ejemplo más común es el de los bancos, que prestan a sus clientes el dinero que reciben de sus depositantes. La retribución que recibe el depositante (interés pasivo) proviene del precio que paga aquel cliente que se beneficia de un préstamo (interés activo). El banco asume el riesgo en ambos casos, tanto para recuperar el dinero prestado como para cumplir con remunerar y devolver el depósito.

En el mercado de valores concurren tanto las empresas que necesitan recursos como los inversores que tienen disponibles esos recursos. Así, las empresas que encuentren los recursos que necesitan pagarán un precio al inversor que se los proporciona. Al igual que un banco, el mercado de valores ofrece diversas alternativas de financiamiento e inversión de acuerdo a las distintas necesidades que puedan tener las empresas o los inversores.

Cabe notar que existe una diferencia entre el sistema bancario y el mercado de valores. Así por ejemplo, si una empresa solicita un préstamo al banco, recibe el dinero en forma directa, sin tener ningún contacto con aquel depositante cuyo dinero entregó en calidad de préstamo. De la misma manera, el ahorrista que realiza un depósito en una cuenta no sabe qué hará el banco con su dinero ni a quién se lo entregará en préstamo. En estos casos el banco asume doblemente el riesgo. A esto se le llama *intermediación directa*.

En el mercado de valores, interactúan de manera directa la empresa que capta recursos y el inversor que se los proporciona. Esto se denomina "*intermediación indirecta*", En principio, el mercado de valores busca ser una fuente de financiamiento más barata que el sistema bancario en razón de que no

tiene el componente de intermediación indirecta que se presenta con los bancos. Aquí se muestra el sistema financiero actual.



Fuente: Elaboración propia

El desarrollo del sistema bancario frente al del mercado de valores determina la estructura financiera de un país. La legislación nacional, y en particular la regulación del sistema bancario y del mercado de valores, debe buscar un adecuado balance entre ambos sistemas definiendo áreas de competencia o participación para instituciones de diversos tipos.

El desarrollo del mercado de valores se mide también a través del indicador "Asset Equitization" que se obtiene dividiendo la capitalización bursátil entre el PBI de un país. Este indicador muestra el proceso por el cual los activos de las

empresas se transforman en activos listados en bolsas, aptos para la inversión individual o institucional. Es también una medida de la preferencia de los inversionistas por alcanzar mayores rentabilidades que las ofrecidas por las alternativas tradicionales.

En principio, cualquier persona con un capital propio puede invertir en títulos en el mercado de valores –acciones e instrumentos de deuda- con el objetivo de obtener una rentabilidad por su inversión. Para ello debe contar con la información necesaria para realizar una buena inversión. Esto es así porque el inversor (ya no el banco) es quien corre con el riesgo de perder su dinero en una mala inversión.

En el Mercado de Valores participan los emisores e inversores, existiendo diversas instituciones que cumplen un rol específico en el circuito de la negociación de valores. Los principales actores son las sociedades Agentes de Bolsa, la Bolsa de Valores, Cavali, las empresas clasificadoras de riesgo y Conasev.

Sociedades Agentes de Bolsa (SAB)

Las sociedades agentes de bolsa son sociedades anónimas autorizadas y supervisadas por la Comisión Nacional Supervisora de Empresas y Valores (CONASEV), con el objeto exclusivo de realizar operaciones de compra y venta de valores. En dicho sentido, su función principal es la de representar la compra o venta de los inversionistas frente a otras sociedades agentes de bolsa. Las sociedades agentes de bolsa también pueden prestar otros servicios, tales como resguardar los valores (custodia), administrar cartera, así como brindar asesoría, mostrando a los inversionistas las diferentes alternativas que brinda el mercado de valores.

En el Perú hay un total de 23 Sociedades Agentes de Bolsa, de las cuales las 10 primeras en términos de monto intermediado en la Bolsa de Valores de Lima en el año 2000 concentran el 90% del total transado.

La Bolsa de Valores

La Bolsa de Valores es el lugar donde se encuentran los demandantes y ofertantes de valores a través de sus sociedades agentes de bolsa, para la realización

de sus operaciones. Adicionalmente, la Bolsa de Valores de Lima brinda información sobre intermediarios autorizados, estados financieros de las empresas inscritas en Bolsa, hechos de importancia que ellas comunican al mercado, e información referida a la negociación de valores.

La Institución de Compensación y Liquidación de Valores (ICLV)

La Institución de Compensación y Liquidación de Valores (ICLV) participa en los procesos de compra y venta de valores realizados en la bolsa, facilitando que estos procesos concluyan satisfactoriamente, a través de la entrega del efectivo a los vendedores y de la asignación de los valores a los compradores. En el Perú esta institución se denomina **CAVALI I.C.L.V. S.A.**

Empresas Clasificadoras de Riesgo

Las empresas clasificadoras de riesgo son empresas especializadas, que opinan sobre la capacidad de un emisor para cumplir con las obligaciones asumidas al emitir por oferta pública, bonos e instrumentos de corto plazo, de acuerdo a las condiciones establecidas (tasa de interés, plazo, etc.).

De esta manera, los inversionistas pueden conocer y comparar el riesgo de estos valores, sobre la base de una opinión especializada.

Según la legislación vigente en el Perú, los emisores de bonos y otras obligaciones deben contar con la opinión de dos empresas clasificadoras de riesgo para que le den una calificación de riesgo al valor que están emitiendo.

Las clasificadoras de riesgo que a la fecha operan en el Perú son Apoyo & Asociados Internacionales S.A. Clasificadora de Riesgo, Clasificadora de Riesgo Pacific Credit Rating SAC, Class & Asociados S.A. Clasificadora de Riesgo, Equilibrium Clasificadora de Riesgo S.A.

Comisión Nacional Supervisora de Empresas y Valores (Conasev)

La Comisión Nacional Supervisora de Empresas y Valores, CONASEV, es una institución pública del Sector Economía y Finanzas. Fue creada formalmente el 28 de mayo de 1968, habiendo iniciado sus funciones el 02 de junio de 1970, a partir de la promulgación del Decreto Ley N° 18302. Actualmente se rige por su Ley Orgánica, Decreto Ley N° 26126 publicada el 30 de diciembre de 1992, la cual establece que, la Comisión Nacional Supervisora de Empresas y Valores,

CONASEV, es una institución pública del Sector Economía y Finanzas, cuya finalidad es promover el mercado de valores. De acuerdo a la Ley del Mercado de Valores, corresponde a la Conasev la supervisión y el control del cumplimiento de dicha ley. Conasev tiene entre sus funciones:

- Estudiar, promover y reglamentar el mercado de valores, controlando a las personas naturales y jurídicas que intervienen en éste.
- Velar por la transparencia de los mercados de valores, la correcta formación de precios y la información necesaria para tales propósitos.
- Promover el adecuado manejo de las empresas y normar la contabilidad de las mismas.
- Reglamentar y controlar las actividades de las empresas administradoras de fondos colectivos, entre otras.

2.1.2 Diagnóstico del Mercado de Valores Peruano

El mercado de valores peruano experimentó durante los últimos años un importante dinamismo, el cual se vió favorecido por el éxito alcanzado en la aplicación de las reformas estructurales que orientaron a la economía peruana hacia su integración al mundo globalizado.

Asimismo, viene contribuyendo al desarrollo de niveles de estabilidad macroeconómica y al retorno a la senda del crecimiento sostenido, la liberalización del mercado de capitales, el trato equitativo a los inversionistas nacionales y extranjeros, y la promulgación de normas legales y tributarias apropiadas para el desarrollo del mercado en un contexto de transparencia y modernidad.

En la Tabla No. 1 siguiente se observa la evolución del Mercado de Valores Peruano en los últimos años.

MONTOS COLOCADOS POR OFERTA PÚBLICA PRIMARIA					
	2004		2005		Var.% 2005/2004
	Mill. US\$	Part. %	Mill. US\$	Part. %	
Acciones	-	-	-	-	-
B. Arrendamiento Financiero	35,04	2,8	114,00	7,7	225,4
B. Corporativos	705,95	56,6	648,13	44,0	-8,2
B. Hipotecarios	25,00	2,0	15,00	1,0	-40,0
B. Titulización	158,24	12,7	265,37	18,0	67,7
Instrumentos de corto plazo	142,48	11,4	299,92	20,3	110,5
Certificado de Depósito Negociables	180,33	14,5	131,94	8,9	-26,8
	1 247,04	100,0	1 474,36	100,0	18,2

Fuente: CONASEV

TABLA No. 1 Evolución del Mercado de Valores Peruano

El Estado debe tener participación activa en el mercado de valores nacional, tanto para cubrir sus propias necesidades de financiamiento como para promover e incentivar su desarrollo.

En este sentido, la existencia de un mercado líquido de instrumentos del gobierno contribuye a la formación de tasas de rendimiento que serviría tanto para la determinación de las tasas de colocación de nuevas emisiones, como para la valuación de instrumentos representativos de deuda.

Igualmente importante es promover que los procesos de privatización y concesiones se financien a través del mercado de valores nacional.

La información difundida por CONASEV señala que durante los primeros cuatro meses del año 2006, el Mercado de Valores Peruano ha continuado mostrando un importante avance y dinamismo. Y así lo reflejan las cifras. Durante dicho período, el monto total de emisiones inscritas vía oferta pública primaria se ha incrementado en más de 90%, y los niveles de negociación secundaria en la bolsa de valores en más de 160%, respecto de similar período del año anterior.

El mercado de valores se viene constituyendo en una herramienta eficaz de asignación de recursos en la economía, cuyo buen funcionamiento ha venido siendo promovido por las sucesivas reformas regulatorias efectuadas por la Comisión Nacional Supervisora de Empresas y Valores (CONASEV) y cuya evolución

refleja, sin duda, los mayores niveles de confianza por parte de los inversionistas e instituciones que participan en él. Por ejemplo, en el año 2005 se modificó el marco regulatorio que permitió implementar el esquema de liquidación multibancaria con participación del Banco Central de Reserva del Perú (BCRP) y, actualmente, cuatro bancos liquidadores están utilizando el sistema de Liquidación Bruta en Tiempo Real (LBTR) del ente emisor. También, se aprobó una serie de reformas al Reglamento sobre Propiedad Indirecta, Vinculación y Grupos Económicos. Entre las novedades más importantes destacan la nueva definición de grupo económico -conjunto de personas jurídicas sujetas al control de una misma persona natural o un mismo conjunto de personas naturales- y la reducción de la obligación de informar de manera exhaustiva sobre la conformación de su grupo económico.

Así, la relación de accionistas con más de 5% de participación, directores y gerentes solo es exigible respecto de la persona jurídica supervisada y obligada por

la norma. De esta manera, actualmente las empresas están obligadas a presentar sólo aquella información relevante para las decisiones de los inversionistas.

En lo que respecta a las reformas regulatorias efectuadas durante el año 2007, se encuentra la nueva regulación establecida para la Oferta Pública de Adquisición (OPA) y la Oferta Pública de Compra (OPC) por exclusión de los valores del Registro Público del Mercado de Valores. Esta regulación incorpora importantes avances que incluyen, entre otros, un régimen de entidades valorizadoras, las cuales tendrán a su cargo la determinación del precio mínimo a ofrecer en la OPA posterior u OPC, según corresponda, y cuyo informe técnico estará a disposición del público.

Asimismo, independientemente del porcentaje del capital social que se adquiera, ahora se considera como obligación para efectuar una OPA toda adquisición de acciones en una proporción tal que le permita remover o designar a la mayoría de los directores o modificar los estatutos de la sociedad. Otro aspecto a resaltar es que el nuevo Reglamento permite también la coexistencia de más de una

oferta sobre los valores de una sociedad, de tal manera que el surgimiento de una nueva oferta competidora no elimina la oferta anterior, como ocurría con el antiguo reglamento. Serán, así, los inversionistas quienes decidirán vender o no sus acciones en función de sus propias percepciones de riesgo y rentabilidad.

Evolución del mercado de valores peruano en el 2005 y 2006

Mercado primario

Las colocaciones por oferta pública en el año 2005 totalizaron US\$ 1 474 millones, 18,2% por encima de lo registrado en el año anterior y el mayor monto colocado en los últimos cinco años. Los instrumentos preferidos por los inversionistas fueron los bonos corporativos, que tuvieron una participación de 44,0%, y los instrumentos de corto plazo, con una participación del 20,3%. Las cinco empresas que colocaron, directamente o través de proceso de titulización, los mayores montos durante el 2005 fueron Hunt Oil Company of Perú, Telefónica del Perú, Duke Energy Egenor, Refinería la Pampilla y Transportadora del Gas del Perú, quienes en conjunto colocaron el 40% del total emitido durante el referido período. Por el lado de la oferta, uno de los aspectos más importantes a destacar fue la presencia de once empresas que obtuvieron por primera vez financiamiento a través del mercado de valores (por emisión directa o a través de titulizaciones), entre las cuales podemos destacar a Cineplex S.A, Grupo Drokasa (Drokasa del Perú S.A., Pharmalab S.A., Farminindustria S.A. y Sociedad Agrícola Drokasa S.A), Pesquera Exalmar S.A., Universidad San Martín de Porres y Hunt Oil Company of Perú. Por el lado de la demanda, se mantuvo la mayor participación de los fondos mutuos y los fondos privados de pensiones administrados por las AFP, con participaciones del 30,8% y 28,5%, respectivamente.

En cuanto a las emisiones y programas de emisión inscritos en CONASEV, el monto de emisiones inscritas ascendió a US\$ 2 086 millones en el 2005, lo que representó un crecimiento de 1,3% respecto del año 2004, mientras que el monto inscrito de los programas alcanzó los US\$ 1 588,6 millones, superior en 8,1% al registrado el 2004.

Cabe destacar que al cierre del 2005 se encontraban en trámite de inscripción emisiones de valores objeto de oferta pública por US\$ 1 864,1 millones, cifra tres veces superior a la registrada en el año anterior (US\$ 550 millones).

Mercado secundario

El monto total negociado en el mercado secundario de valores durante el año 2005 ascendió aproximadamente a US\$ 4 063,2 millones, de los cuales el 89,4% correspondió al monto negociado dentro de la Bolsa de Valores de Lima (BVL) y la diferencia a operaciones extrabursátiles.

De esta manera, la negociación a través de la BVL (S/. 12 026 millones), la mayor de los últimos cinco años, registró un incremento de 42,4% con relación al 2004, mostrándose una mayor concentración en las operaciones al contado con instrumentos de renta variable (58,7%) y en las operaciones con instrumentos de deuda en el segmento de mercado de dinero (27,1%).

En cuanto a la rentabilidad de las inversiones en la BVL, **[49]** los indicadores también fueron positivos y superiores a los de otros mercados de la región. El crecimiento anual del Índice General de la BVL fue del 29,4%, una rentabilidad significativa aun cuando estuvo por debajo de la obtenida en el 2003 (74,9%) y el 2004 (52,4%).

No obstante, la rentabilidad obtenida en la BVL durante el 2005 fue superior a la registrada en otras bolsas de la región, como las bolsas de Sao Paulo, Buenos Aires y Santiago donde se obtuvieron variaciones anuales en sus índices de 27,71%, 12,21% y 2,72%, respectivamente.

A nivel sectorial, las acciones que, en conjunto, presentaron un mayor incremento en sus precios fueron aquellas pertenecientes al sector Bancos y Financieras, con 105,2%, y al sector Agropecuario, con un aumento de 42,0% en sus precios. Esta situación contribuyó al alza en la capitalización bursátil accionaria, la cual se situó al cierre del 2005 en US\$ 36 196 millones. Cabe destacar que la capitalización bursátil como proporción del Producto Interno Bruto se incrementó de 24,3% al cierre del año 2004 a alrededor de 49% al cierre de 2005.

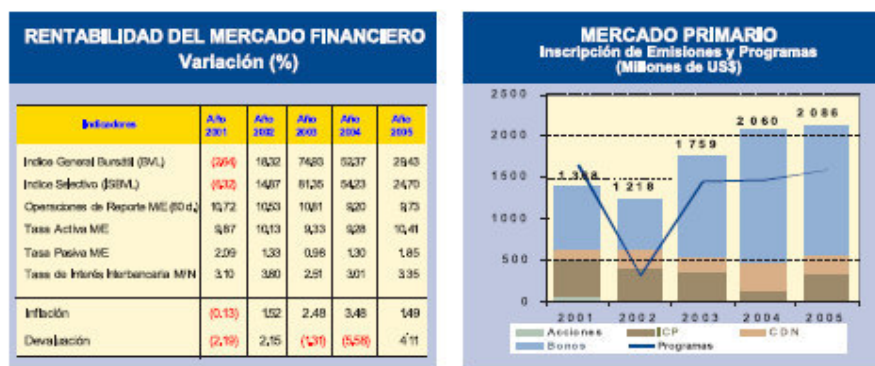
Mercado de fondos mutuos

El número de partícipes del sistema de fondos mutuos viene mostrando un crecimiento sostenido durante los últimos cinco años (2002 – 2006), sólo en el 2005 el incremento fue del 39,8%, con lo cual al cierre del año se contaba con un número de 115 447 partícipes. Por su parte, el patrimonio total administrado en el sistema (US\$ 1 997,4 millones) creció en 13%, recuperándose de la caída registrada en el 2004.

El valor de la cartera de inversiones administrada por los fondos mutuos, al cierre de diciembre 2005 alcanzó los S/. 6 832,4 millones (US\$ 1 992,8 millones). La cartera mostró una mayor participación de los bonos del sector privado (46,3%), luego de registrar en similar mes del año anterior una participación de 44,9%, mientras que los bonos del Estado redujeron su participación de 17,8% a 11,3%. En lo que respecta a los depósitos de ahorro y plazo se puede observar que en el mismo período su participación en el total de la cartera ha disminuido ligeramente de 33,0% a 32,5%.

Durante el mes de junio del 2006, en *el mercado primario* las colocaciones de ofertas públicas primarias fueron equivalentes a US\$ 85.2 millones, lo que representó en términos absolutos una disminución de US\$ 36.7 millones, con relación al monto colocado en el mes anterior. Los principales demandantes en junio fueron los fondos mutuos, que demandaron el 56.6% del total colocado, seguidos por los fondos privados de pensiones, administrados por las AFP, con una participación de 14.7% y los bancos con una de 11.7% - Tabla No.2

EL MERCADO DE VALORES EN CIFRAS AL 31 DE DICIEMBRE DE 2005



Fuente: CONASEV

TABLA No. 2 Mercado de Valores Peruano

Mercado secundario.

El monto negociado durante el mes de junio de 2006 en la BVL fue de S/. 2 401.6 millones, lo que representó un incremento de 69.8% con relación al monto negociado en el mes de Mayo. Este incremento se debió principalmente a la negociación resultante de una propuesta por Latín América Cellular Holdings B.V. (una empresa subsidiaria al 100% de Telefónica Móviles, S.A.) para la adquisición del total de acciones de Telefónica Móviles Perú Holding S.A.A del 15 de junio al 21 de junio. El IGBVL y el ISBVL mostraron resultados positivos, en el primer caso, en 13.09% y en el segundo, en 13.12%, con relación a los índices registrados al cierre del mes de Mayo. La capitalización bursátil aumentó durante el mes de Mayo, con lo cual se registró un valor al cierre del mes de US\$ 47 320.5 millones.

Durante el mes de junio el número de partícipes en el sistema de fondos mutuos se incrementó en 3 815 y el patrimonio administrado mostró similar comportamiento al registrar un aumento de 2.2% equivalente a US\$ 45.3 millones.

CONASEV [50]

Por consiguiente, al estado le corresponde promover la eficiencia de los mercados de valores, a través de la regulación, supervisión y difusión de la información, fortaleciendo de esta manera la confianza y transparencia entre sus participantes.

2.2 Aspectos fundamentales de las decisiones financieras para realizar las inversiones arriesgadas

En la práctica las decisiones financieras que la empresa debe resolver involucran aquellas asignaciones de recursos a través del tiempo y se pregunta: ¿Cuánto debería invertir y en que activos concretos deberá hacerlo?

Las decisiones de financiamiento apuntan a cuáles son las óptimas combinaciones para financiar las inversiones y tratan de responder a la pregunta ¿como debería conseguirse los fondos necesarios para tales inversiones? ¿Qué parámetros son de importancia para las decisiones financieras?

En la mayor parte de las decisiones financieras aparecerán dos parámetros de decisión: el riesgo y el retorno. Estos dos parámetros están asociados de una manera directa, es decir mayor riesgo - mayor retorno esperado, y a menor riesgo menor retorno esperado. Por tanto, toda decisión financiera conlleva una incertidumbre y una actitud ante el riesgo. En este caso el banco asume una doble posición como accionista y acreedor frente al riesgo: *En primer lugar*, realiza una inversión rentable, ofreciendo a sus empresas el manejo de sus recursos en condiciones favorables para la realización de sus inversiones. *En segundo lugar*, se diversifica y asume compromisos de gestión en actividades que pueden llegar a estar muy alejadas de su núcleo de negocios, contrayendo responsabilidades a largo plazo que podría obligarle a intervenir y apoyar a empresas con problemas de viabilidad financiera. *En tercer lugar*, el banco accionista tiene poder, lo que permitirá generar un negocio financiero adicional e incluso obtener beneficios. Esto le llevaría a asignar tipos de interés superiores a los del mercado, forjar el endeudamiento de la empresa con comisiones abusivas, etc.

Por último, el banco puede emplear su posición de privilegio para proteger sus inversiones crediticias, tanto para empresas que se destinen a actividades de alto riesgo como en situaciones de crisis empresarial.

Por otro lado, asume una concentración creciente de riesgos, ya que soporta crédito y capital al mismo negocio. Esta doble condición del banco, como accionista y acreedor, genera tres interrogantes:

- ¿Participa en el capital para evitar que la empresa emprenda inversiones arriesgadas?
- ¿Interviene en la empresa en dificultades para proteger sus créditos?
- ¿Cómo afecta su actuación a la empresa en términos de creación de valor para sus accionistas?

La participación accionaria puede obedecer al deseo del banco de eliminar el problema de sustitución de activos. En efecto, el que presta fondos a una empresa corre el riesgo de que esta los emplee en proyectos muy arriesgados de elevada rentabilidad.

La consecuencia es inmediata, los resultados positivos serán para las empresas, en caso contrario, la responsabilidad de éstas es limitada, ya que las mayores pérdidas serán para el acreedor.

Como prestamista financiero, el banco es adverso al riesgo y utilizará su capacidad decisoria como accionista para impedir que se efectúen inversiones de alto riesgo. El estudio de las decisiones de inversión, en condiciones de incertidumbre, establece algunos procedimientos importantes para analizar las inversiones arriesgadas.

En condiciones de incertidumbre, la inversión y la financiación son decisiones que deben adaptarse simultáneamente porque la rentabilidad de una inversión no puede determinarse mientras no se conozca las normas de financiación, y esta regla a su vez depende de los riesgos unidos a la inversión.

Los riesgos asignados a una inversión son de dos tipos: operativo y financiero. *El riesgo operativo*, es la parte del riesgo total pues esta unido a la inversión, mientras que el *riesgo financiero*, es la parte que la administración introduce mediante la financiación con deuda.

El inconveniente viene determinado por el binomio riesgo – rentabilidad, que implica una relación directa. Así, las inversiones más arriesgadas dan mayores rentabilidades y a la inversa. Por este sistema, las letras del tesoro aportan unos beneficios mucho menores que las opciones de largo plazo.

En general, en el mundo de las inversiones el *riesgo es proporcional a la rentabilidad* que se puede conseguir: a mayor riesgo, mayor rentabilidad y viceversa. La bolsa es una de las alternativas de inversión más arriesgadas pero también una de las que más altas rentabilidades ofrece.

La creencia de que la bolsa siempre sube a largo plazo, se basa en el hecho estadístico de que la bolsa históricamente ha proporcionado mayores rentabilidades al resto de alternativas de inversión. Si bien hay muchas maneras distintas de aproximarse a la bolsa, lo que debe quedar claro es que el valor de una empresa

depende de los beneficios que vaya a generar en el futuro; en la medida en que se esperen grandes beneficios para una compañía, su valor será mayor o menor, en ese sentido se puede afirmar que cada inversor tiene sus propias expectativas.

Otros de los métodos para juzgar inversiones arriesgadas es la del valor monetario esperado (VME). Este método comprende el flujo neto de fondos, originado en una inversión en cada periodo, como una variable aleatoria capaz de asumir uno de los valores posibles. Luego se calcula el valor esperado para cada valor de variable aleatoria y se juzga la inversión como si se tuviese la certeza de que se obtendrán los fondos esperados.

2.3 Teoría moderna de carteras

2.3.1 Teoría de selección. Estructura de preferencias

Actualmente todo mercado financiero cuenta con una amplia gama de instrumentos financieros, con patrones y características diferentes. A pesar de que cada uno de estos instrumentos lleva un riesgo asociado, los inversores pueden disponer de diversas posibilidades con diferente perfil de riesgo y perfil de rendimiento. Según Bodie y Merton [5], la teoría de portafolio no es otra cosa que el “análisis cuantitativo de la Administración óptima del riesgo”. Basado en este contexto. Se pretende dar respuesta a la interrogante: ¿Cuál es el papel del riesgo en la toma de decisiones Óptimas?, frente a lo cual Harry Markowitz (quien compartiera el premio Nobel de Ciencias Económicas en 1990 con Merton H. Miller y William F. Sharpe) desarrolló su teoría plasmada en su obra “Portafolio Selection” (1952), la que describe los pasos para construir un portafolio eficaz de inversiones, con base en la combinación óptima de los retornos esperados y el riesgo asociado a las inversiones:

La Teoría del Portafolio está directamente relacionada con la selección de la alternativa de inversión que sea más conveniente, de manera que satisfaga determinados axiomas, que maximicen el bienestar presente y futuro del inversionista.

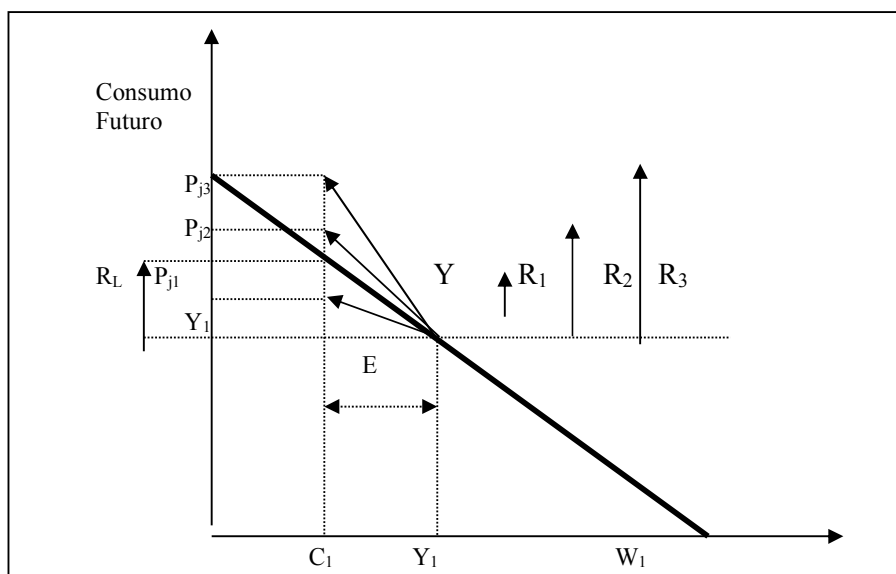
La idea de la teoría de cartera de inversión surgió a consecuencia de que los inversionistas necesitaban decidir cómo y en dónde invertir sus recursos financieros, de esta idea se deriva la relación del riesgo-rendimiento.

Se entiende por *cartera de inversión* a una determinada combinación de activos financieros adquiridos por una persona física y jurídica, que pasan a formar parte de su patrimonio.

Cada inversor es un agente racional que tiene preferencias particulares sobre distintas alternativas de inversión. (Marín) [23].

En la Grafica No.1 – Conjunto de Preferencias - nos muestra que la inversión de la riqueza es en esencia un medio que conduce hacia la satisfacción de un consumo futuro, en donde el ahorrista/inversionista, decide gastar C_1 soles de sus ingresos totales Y_1 , quedándole E soles para invertir. De forma que, si los resultados son positivos, se conseguirá una rentabilidad de R_1 o mejor aún R_2 o R_3 , teniendo así para gastar en su consumo futuro la cantidad de P_{J1} y si es todavía más afortunado las cantidades de P_{J2} o P_{J3} , dependiendo por supuesto del Perfil de riesgo del inversor: ya sea en el escenario de adversidad, indiferencia o quizás de jugador al riesgo.

Conjunto de preferencias



Grafica No. 1- Conjunto de preferencias

De igual forma, Márquez [26] estableció que el proceso de selección de alternativas de inversión con perspectivas inciertas conlleva la secuencia de los siguientes pasos: primero, deben identificar las diferentes alternativas de inversión, lo que determinaría el “conjunto de oportunidades”. En segundo lugar, se debe definir la estructura de preferencias del agente inversor, que es explicada a través del siguiente axioma de convexidad:

“Dados dos paquetes x , y entre los cuales hay indiferencia, si se forma una combinación convexa, w , de ambos el sujeto nunca preferirá x o y sobre w ”.

El inversor siempre preferirá la cartera que contenga menos riesgo (volatilidad) y mayor cantidad de rentabilidad esperada, produciéndose una especie de asociación negociable entre ambas variables. Para la adecuada selección de alternativas de inversión se debe considerar las siguientes reglas de decisión:

- 1) Si se tienen dos carteras con el mismo riesgo y diferente rentabilidad esperada, entonces se escogerá la cartera que ofrezca la mayor rentabilidad.
- 2) Si las dos carteras tienen la misma rentabilidad esperada pero diferente Riesgo, se elegirá la cartera de menor riesgo.

William Sharpe [47] sostiene también que la tarea de selección de un portafolio contempla tres fases bien definidas: el análisis de títulos, el análisis de carteras y la selección de la cartera. En otras palabras, el análisis de títulos es un trabajo que conlleva habilidades que implican la predicción del rendimiento futuro de un título, tomando en cuenta para ello la incertidumbre individual de cada activo, para luego ser sucedido por la segunda fase, que no necesitaría de las habilidades especiales de la primera y en donde habría que medir las relaciones y consecuencias de su agrupamiento (cartera de títulos). La tercera y última fase comprende la selección de un conjunto de títulos que se ajusten al requerimiento o perfil de riesgo del inversor.

La teoría de la selección plantea que los inversionistas elegirán entre opciones que tienen diferente combinación de riesgo y rendimiento. Generalmente, para esta teoría el inversionista tiene aversión al riesgo.

2.3.2 Curva de indiferencia

Como se estableció a través de la teoría de la selección, los inversionistas elegirán la mejor opción en cuanto a rendimiento esperado y riesgo. Si un inversor es reacio al riesgo y asocia el riesgo con su divergente nivel de rendimiento, la curva representativa se denomina curva de indiferencia, esto quiere decir que el inversor es indiferente ante cualquiera de las combinaciones de rendimiento medio y la desviación estándar de una curva determinada. Pues, cuanto más empinada es la curva mayor es la aversión al riesgo por el inversor.

En otras palabras, las preferencias de los inversionistas están representadas a través de curvas de combinaciones de riesgo/rendimiento por ser atractivas para un inversor. Esta clase de curva se conoce como *curvas de indiferencia*.

El inversor ha de desear que su curva lo coloque sobre la mejor de las curvas de indiferencia permitida por las combinaciones posibles de inversión.

Si suponemos que el riesgo puede medirse por medio de la desviación estándar del rendimiento $\sigma(R)$ y que el rendimiento se mide por el rendimiento esperado $E(R)$, las curvas de indiferencia de un inversionista se pueden mostrar de la siguiente manera:

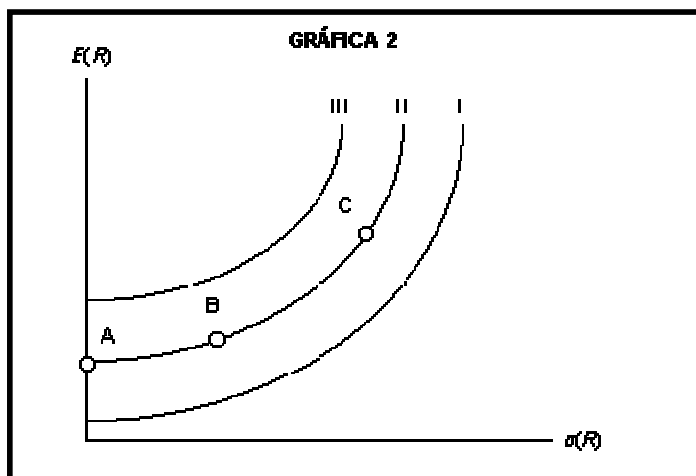


Grafico No. 2. Curvas de indiferencia del inversor

A lo largo de las curvas en la gráfica 2, - *curvas de indiferencia del inversor*, podemos observar que si el inversionista se ubicara en la curva de

indiferencia II los puntos A, B y C le proporcionarían la misma utilidad total porque se encuentran en la misma curva de indiferencia. Pero como el inversionista tiene aversión al riesgo escogerá el punto A, el cual no tiene riesgo y el rendimiento es bajo. Sin embargo, puede ubicarse en el punto C, que tiene un alto rendimiento pero también un alto riesgo. El rendimiento más alto en el punto C bastará para compensar al inversionista por el riesgo adicional. Cuando más inversionistas entren en escena, cada uno de ellos tendrá diferentes conjuntos de curvas de indiferencia o diferentes compensaciones de riesgo-rendimiento. Entre mayor sea la pendiente del conjunto de curvas de indiferencia más alto será el rendimiento que el inversionista espera entre pequeños incrementos de riesgo.

La gráfica 3 muestra que el inversionista B requiere un rendimiento más alto ante pequeños incrementos de riesgo. Comparándolo con el inversionista A, el B espera mayor rendimiento ante el mismo monto de riesgo que A.

Sin embargo, el trabajo del inversionista no culmina eligiendo la curva más alta, sino que deberá atenerse a las posibilidades disponibles en el mercado.

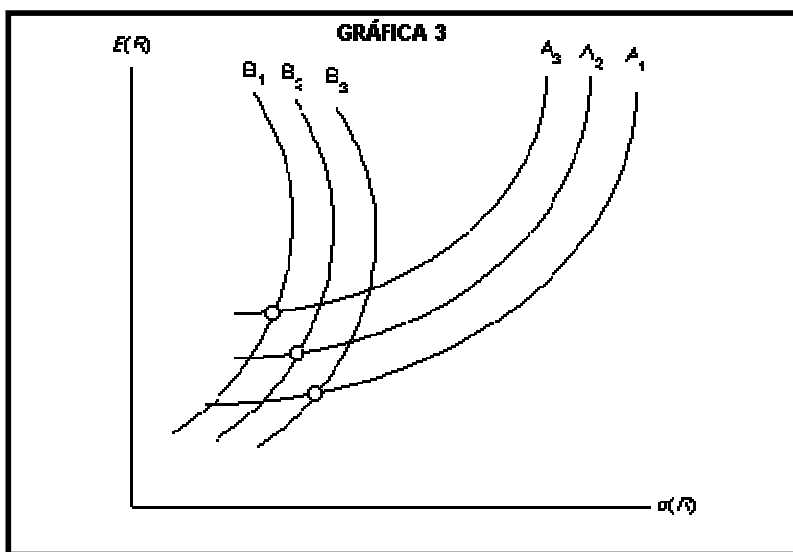
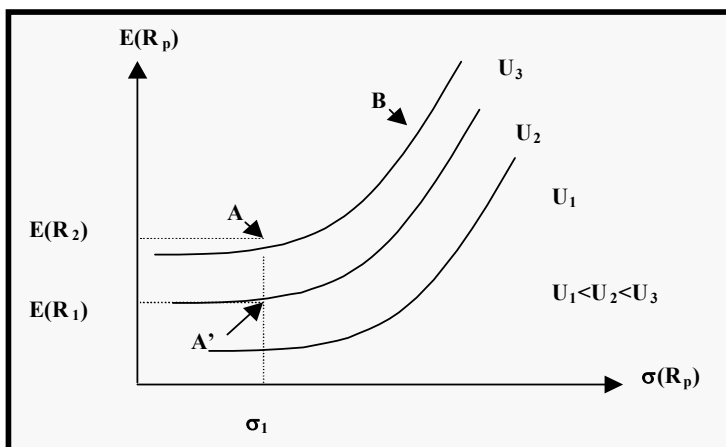


Gráfico No.3. Curva de indiferencia con rendimientos diferentes

Así podemos notar, en la grafica No. 4-, que el individuo es indiferente entre el punto A o B de la curva U3. Sin embargo, si tiene que elegir entre A' y A

escogerá esta última debido a que con el mismo nivel de riesgo obtiene un mayor rendimiento.



Grafica No. 4 Curvas de indiferencia de un individuo adverso al riesgo

2.3.3 Selección de cartera

Una cartera se define como una combinación de activos, también se le conoce como *portafolio de inversión*, que es una selección de documentos o valores que se cotizan en el mercado bursátil y en los que una persona o empresa deciden invertir su dinero.

Los portafolios de inversión se integran con los diferentes instrumentos que el inversionista haya seleccionado, para hacer su elección debe tomar en cuenta aspectos básicos, como el nivel de riesgo que está dispuesto a correr y los objetivos que busca alcanzar con su inversión.

La teoría de la cartera se ocupa de la construcción de carteras óptimas con una razonable aversión al riesgo y sus implicancias sobre los rendimientos y precios de los diferentes activos. Los gestores de la teoría moderna de carteras son Markowitz [25], Sharpe [47] y Lintner [22], quienes simplificaron el problema suponiendo que las preferencias de los inversionistas solo dependen de la media y la varianza del valor aleatorio de liquidación de su cartera. Markowitz señala que para diseñar una cartera eficiente es necesario entender lo que significa rendimiento esperado y riesgo.

La teoría de carteras trata de la selección de carteras óptimas de parte de inversores racionales adversos al riesgo, es decir, de parte de inversores que intentan maximizar el rendimiento esperado de sus carteras, siendo éste consistente con niveles aceptables de riesgo de cartera.

El rendimiento de la cartera de un inversor durante un período determinado equivale al cambio de valor de la cartera más cualquier dividendo o intereses recibidos de la cartera expresada como una fracción del valor inicial de la cartera.

Para seleccionar un portafolio óptimo se debe tener en cuenta los siguientes pasos:

1. Comenzar por tener claridad en la relación riesgo-retorno del Inversionista. Esta se logra preguntando el nivel de retorno deseado del inversionista o especificando el nivel de riesgo deseado.
2. Recopilar la información histórica. Con esta información se calcula la Estadística correspondiente a cada título en cuanto a retorno y riesgo.
3. Con esta información se conforma una serie de portafolios. El retorno esperado y el riesgo para cada portafolio se calcula y de esta manera se escoge el portafolio óptimo.

La selección de cartera o portafolio de mercado es un tema muy importante para muchos investigadores en el área. En una de sus más recientes publicaciones Cai-Teo-Yang y Zhou-[10], señala que para crear un portafolio de mercado, para el inversionista cauteloso, se logra minimizando el riesgo individual mediante el uso de una función como una medida de riesgo. Esto lo logran planteando y resolviendo un problema de optimización paramétrico que equivale minimizar el riesgo y maximizar el retorno esperado.

2.3.4 Oportunidades de carteras

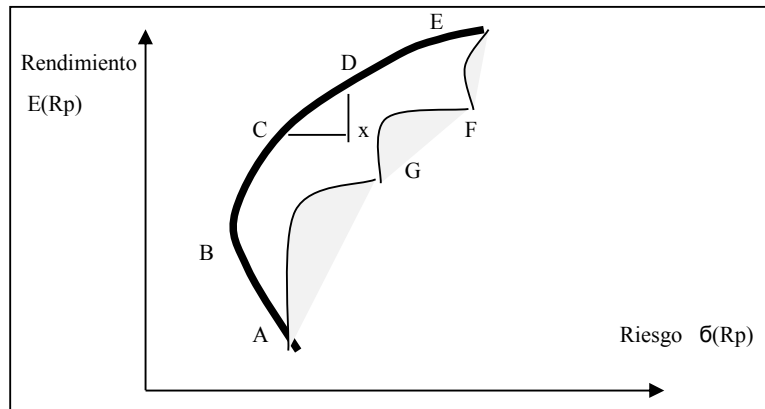
Cartera es una combinación de activos, y la teoría de cartera se ocupa de la selección de carteras óptimas, estableciéndose que los márgenes de rendimiento corresponden a cualquier grado específico de riesgo o el menor riesgo para cualquier tasa específica de rendimiento.

Supongamos que se toman en consideración N activos, en donde $N > 1$. Estos activos se pueden combinar en un número casi ilimitado de carteras y cada cartera posible tendrá una tasa esperada de rendimiento, $E(R_p)$ y un riesgo de σ_p . Esta combinación de carteras posibles es definida como conjunto factible, como se observa en la grafica No 5, en la zona sombreada.

Dado el conjunto total de carteras que se pueden construir mediante los activos disponibles, nos preguntamos se procederá a la selección de la cartera óptima del modo siguiente:

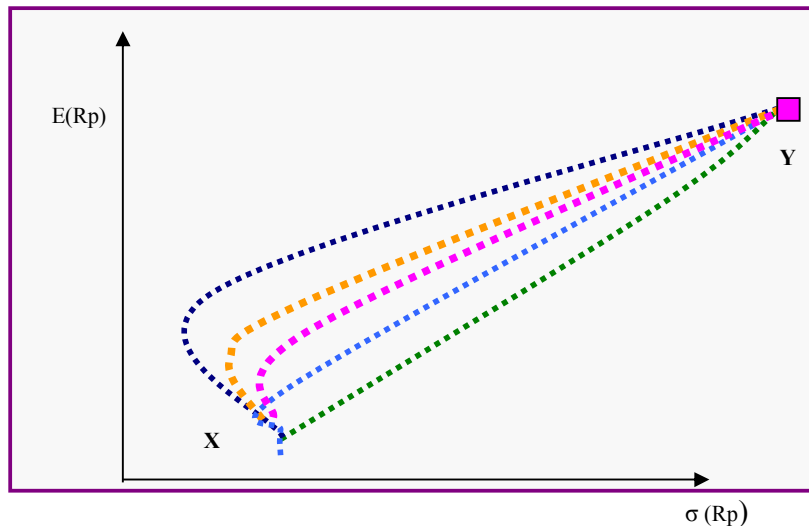
1. Determinar el conjunto eficiente de carteras
2. Elegir del conjunto eficiente, aquella cartera que sea la mejor para el inversionista individual.

Por tanto, una cartera se considera eficiente si proporciona los rendimientos esperados más elevados que sean posibles para cualquier grado de riesgo o el grado más bajo posible de riesgo para cualquier rendimiento esperado. En la grafica expuesta, el limite BCDE define el conjunto eficiente de cartera. Las carteras situadas a la derecha del conjunto eficiente son ineficientes, porque alguna otra cartera podría producir rendimientos más altos con el mismo grado de riesgo o un riesgo más bajo con la misma tasa de rendimiento. Para el efecto, consideremos el punto X, la cartera C proporciona la misma tasa de rendimiento que la X; por la C produce menor riesgo. De otro lado, la cartera D es tan arriesgada como la X pero ofrece una tasa esperada de rendimiento más alta, los puntos C y D y otros puntos situados en el límite del conjunto eficiente entre C y D dominan al punto X.



Grafica No.5 – Oportunidades de carteras

En la mayoría de los casos sucede que los activos riesgosos no están perfectamente correlacionados y se les podría mostrar en la Grafica No 6, la cual enmarca el conjunto de casos generales. Esta figura muestra todas las curvas que van de X a Y y se denomina *conjunto de oportunidades de la cartera* con mínima varianza, es decir que son las combinaciones de carteras que proporcionan la varianza mínima (o desviación estándar mínima) en una tasa dada de rendimiento y considerando un tipo específico de correlación.



Grafica No. 6. Activos riesgosos

En las curvas que tiene una correlación $\rho = 1$, y $\rho = 0.5$ todas las combinaciones de riesgo-rendimiento son eficaces. Para las otras curvas con distinta correlación a las anteriores las combinaciones eficaces están sobre la parte continua de la curvas.

2.4 Problemas que generan riesgo e incertidumbre.

El enfoque Keynesiano de la teoría de cartera, respecto al problema de riesgo e incertidumbre se sintetiza en dos razones:

La primera, es que hay en realidad muchos activos generadores de intereses que no involucran mayor riesgo de ganancia o pérdida de capital que los depósitos bancarios (dinero).

La segunda, es que no existe a priori razones para suponer que la elección entre el dinero y los títulos se vea afectada por el riesgo de capital. No obstante, hay que distinguir entre incertidumbre y riesgo. El riesgo se presenta cuando es factible formular una función de probabilidad del fenómeno que se evalúa. Si ello no es posible, aparece la *incertidumbre*.

Para hablar de riesgo debemos contar con suficiente información histórica para estimar estadísticamente una distribución de probabilidades. Este es el caso del rendimiento de las acciones y bonos frecuentemente negociados en los mercados de valores. La posibilidad de cambios en las políticas económicas en un país inestable, serían ejemplos de incertidumbre.

De hecho, toda cartera de valores se encuentra sujeta a riesgos, como el de no conseguir el rendimiento buscado, el de no obtener los intereses deseados. Pues, ¿de dónde proceden estos riesgos?,

Uno de las principales formas de estudiar el proceso de administración del riesgo es ***medir la incertidumbre*** o la volatilidad de las variables de riesgo. La forma más usual y práctica de medir la volatilidad es a través de la varianza (o desviación estándar); esto es, cuanto mayor sea la desviación estándar de la variable de riesgo respecto a su valor esperado, mayor será la volatilidad de la misma.

Las medidas más conocidas del riesgo de un activo son su Varianza y su Desviación Standard. Estas representan la desviación de la media, o dicho de otra

manera, cuánto es probable que se desvíen los rendimientos esperados respecto del valor medio esperado. En finanzas el riesgo que corre un activo se le conoce como *volatilidad*, que debe entenderse como la “fluctuación” que puede sufrir un activo en el tiempo.

El riesgo financiero es el riesgo de no estar en condiciones de cubrir los costos financieros, por ello su análisis se determina por el grado de apalancamiento financiero que tenga la empresa en un momento determinado.

En la actualidad el desarrollo de las instituciones y de las economías se distingue por una actitud distinta hacia los acontecimientos futuros, puede anticiparse, simularse y cuantificarse, utilizando herramientas cuantitativas, que permitan identificar la exposición al riesgo, como cuantificar sus posibles consecuencias en términos monetarios, con el propósito de proteger el capital de las instituciones, para la mejor toma de decisiones.

En ese sentido, la esencia del riesgo se caracteriza por:

- El riesgo (medible) está asociado con la varianza mientras la incertidumbre está asociada con la volatilidad.
- El riesgo se halla de forma implícita asociado a toda actividad
- El riesgo acompaña a todo cambio.
- El riesgo implica elección e incertidumbre.

Los riesgos se diferencian de los problemas, en que un riesgo es la posibilidad *futura* de que se produzca un resultado adverso o una pérdida, mientras que los problemas - son las condiciones o las situaciones que ya están *presentes* en un proyecto. Los riesgos pueden, además, convertirse en problemas si no se tratan con eficacia.

Los riesgos económicos, aunque también dependen a menudo de factores subjetivos, son más propensos a ser valorados o medidos.

La identificación de los riesgos está muy estrechamente relacionada con su medición, pues no se trata solo de conocer cuáles eventos podrían afectar el desenvolvimiento de la entidad, sino evaluar esos riesgos para determinar cuáles podrían afectarla más y centrar en ellos la atención y la gestión.

La mayor parte de los proyectos de inversión se presentan en condiciones de riesgo o incertidumbre. Es posible distinguir entre una inversión en riesgo o en incertidumbre en función de la cantidad de información que conocemos sobre dicha inversión. En la práctica, si conocemos los estados de la naturaleza y la probabilidad asociada a los mismos estaremos ante un caso de inversión en riesgo y si sólo conocemos los estados de la naturaleza pero no las probabilidades, entonces, estaremos ante un caso de incertidumbre.

El hecho es que la incertidumbre no se puede cuantificar, pero aunque no sea posible hacerlo estadística o matemáticamente, el inversor necesita tomar acciones para tener una apreciación del futuro.

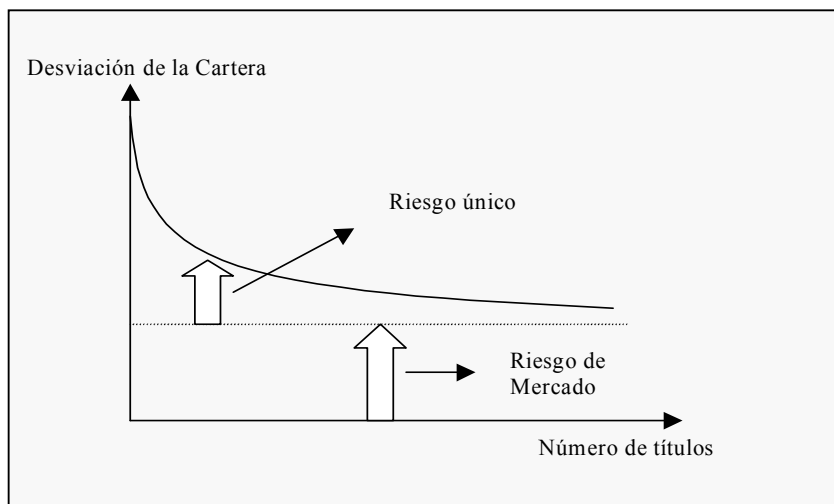
La incertidumbre tiene dos fuentes:

En la primera fuente, se tiene las apreciaciones subjetivas; es decir juicios y valoraciones que dependen de gustos, experiencias, estilo, intuición. Estas apreciaciones subjetivas alimentan el nivel de la incertidumbre., que puede ser interesante para algunos inversionistas y forma parte de su vida diaria.

La segunda fuente: provienen del ámbito dentro del cual se debe realizar la elección, debido a que en él operan ciertas restricciones que no están bajo control del sujeto que debe hacer la elección.

Así, por ejemplo un inversionista está expuesto a incertidumbre en cuanto a los precios de los distintos activos en los mercados, a las acciones gubernamentales en cuanto a requisitos legales y tributarios, en cuanto a sus necesidades de liquidez ya que es imposible predecir con exactitud nuevas oportunidades de inversión de mejor rendimiento que las que hubieran podido existir anteriormente.

El problema de selección de cartera no escapa de ninguna de estas dos fuentes de incertidumbre a pesar de su carácter económico y práctico, diríamos entonces, que la incertidumbre es la culpable del riesgo en una inversión, como se observa en la grafica No. 7. Si no existiera el riesgo ni la incertidumbre el problema de cartera estaría solucionado.



Grafica No. 7 Riesgo de una inversión

En el problema de selección de cartera hay diversos tipos de riesgos:

- a) **Riesgo de pérdida**, es decir, de no recuperar la inversión y que se produzca una pérdida de capital.
- b) **Riesgo de liquidez**, es decir, comprometer recursos en activos difíciles de convertir en dinero, provocando una pérdida en el momento en que se hace necesario efectuar un pago imprevisto o cuando determinadas operaciones no se puedan realizar en el corto plazo.
- c) **Riesgo de desaprovechar oportunidades de inversión**, es decir, asignar recursos a ciertos activos que tienen menos rendimientos que otros.
- d) **Riesgo de mercado**, cuando el valor de sus inversiones baje, debido a una caída de los precios. Es la pérdida potencial por cambios en los factores de riesgo de mercado que tienen efecto sobre el valor del portafolio.
- e) **Riesgo de crédito**, cuando contempla las posibilidades de que una institución no tenga la solvencia necesaria para devolver el dinero.
- f) **Riesgo país**, mide la capacidad de que el conjunto de prestatarios de una determinada nación haga frente a sus obligaciones de pago. Pero el riesgo país no solo afecta las inversiones en bonos del gobierno, sino que afecta a toda la actividad financiera, repercutiendo en las tasas y los rendimientos de activos muy diversos.
- g) **Riesgo inflacionario**, es el riesgo de que una inversión, a pesar de dar un resultado positivo, al compararse contra la inflación del período, resulte

negativa. La única forma de evitar este riesgo es tomando mayores niveles de otros tipos de riesgo.

- h) **Riesgo cambiario**, surge como resultado de los cambios en la relación entre monedas de distintos países. Si se invierte en algún activo que cotiza en una moneda del exterior—acciones de una empresa japonesa por ejemplo—puede ocurrir que aunque la rentabilidad de la inversión directa sea positiva, al convertirla a moneda local, la diferencia de cambio absorba parte o toda la ganancia y aun parte de la inversión inicial.

En síntesis, el inversionista que dirige una empresa tiene que forjarse ideas sobre el entorno que la rodea y las expectativas sociales y específicas a la empresa y necesita hacerse una idea de las estrategias que debe planificar para hacer frente al problema de riesgo e incertidumbre en el mercado de valores, para garantizar sus inversiones futuras.

2.5 La Medición del Riesgo- Rendimiento

El objetivo fundamental de la inversión es maximizar el rendimiento minimizando el riesgo. Obtener el máximo rendimiento implica asumir riesgo.

En los mercados financieros, obtener rendimiento significa ganar dinero. Esto se consigue invirtiendo en algún activo financiero que produce rendimientos explícitos (como los bonos y obligaciones) o implícitos (como las acciones). Los nombres que reciben los rendimientos son variados, en función del activo que lo produzca: intereses de los depósitos bancarios, dividendos de las acciones, obligaciones, cupones de los bonos, etc.

Asimismo, para lograr el objetivo de maximizar el precio de las acciones, el gerente de finanzas debe aprender a evaluar los dos factores determinantes del precio de las acciones: el riesgo y el rendimiento.

En un sentido básico el riesgo se vienen definiendo como la posibilidad de enfrentar una pérdida financiera. El término riesgo se emplea de manera diferente

con respecto al término incertidumbre. Cuando más seguro sea el rendimiento de un activo, menor será la variabilidad y, por tanto, menor será el riesgo.

El riesgo es una parte inseparable de toda inversión, ya que por lo general existe una relación directa entre el riesgo y el rendimiento, donde el tiempo juega un papel importante dentro de su composición. Aunque no siempre el resultado es el mismo, las inversiones con mayor riesgo tienen un mayor potencial de rendimiento, y viceversa, a menor riesgo, menor la recompensa.

No se pueden eliminar los riesgos al invertir, pero un inversor que conoce los diferentes tipos de riesgo podría tomar los pasos necesarios para mantenerlos en un nivel aceptable. Al conocer los riesgos se pueden formular estrategias que los contrarresten y algunas veces convertirlos en oportunidades y de esta forma lograr alcanzar los objetivos de inversión

Por tanto, el comportamiento del inversor viene condicionado por dos fuerzas atrayentes:

1. **Rendimiento**, medido en términos de *Esperanza Matemática* o rendimiento esperado por el inversor en el futuro.
2. **Riesgo**, medido en función de la Varianza o Desviación Típica.

De ahí que el modelo de Markowitz también se conozca con el nombre de **Modelo de Inversión de dos Dimensiones o Modelo de la Media-Varianza**.

Los rendimientos que se obtienen de los distintos activos son *variables*. En un periodo concreto, por ejemplo un año, los rendimientos de los bonos y de las acciones son distintos. Estas diferencias no se pueden prever ya que dependen de muchos factores.

El *análisis del riesgo* se centra en identificar cuáles son los factores que hacen que los rendimientos sean variables, es decir, medir cómo son de variables y estudiar la relación entre rendimiento y variabilidad. Si un activo rinde, con igual probabilidad el 0% o el 10% y otro rinde él -25% o el 35%, ambos tienen una rentabilidad media igual (el 5%), pero puede claramente notarse que el segundo activo es más variable. A esta variabilidad en términos financieros se le llama

riesgo. Un activo será más *arriesgado* que otro si sus rendimientos son más *variables*.

En general, podemos deducir que un inversor racional sólo aceptará invertir en un activo más arriesgado si el rendimiento medio que le ofrece es más alto que el que ofrece un activo menos arriesgado.

Esta definición nos permite establecer una estricta condición “que a mayor riesgo, mayor es el rendimiento que se ofrece”. De aquí se deriva lo siguiente:

- Un **Portafolio de inversión moderado** acepta un grado de riesgo menor
- Un **Portafolio de inversión agresivo** acepta un grado de riesgo mayor
- Un **Portafolio de inversión conservador** no acepta grado de riesgo alguno

De estas apreciaciones, podemos establecer que la medida de riesgo de portafolio más conocida es la varianza, que mide la volatilidad de los retornos alrededor de la media. Sin embargo, la percepción sobre el riesgo de una inversión está generalmente asociada a las variaciones de los rendimientos por debajo de una tasa de rentabilidad mínima.

El cálculo del riesgo de un portafolio no es tan sencillo como en el caso del rendimiento dado, que no sólo influye el promedio ponderado de las desviaciones de cada activo sino que también influye la correlación entre los mismos, que permite disminuir el riesgo total del portafolio.

En efecto, para obtener rendimientos más elevados hay que asumir mayores riesgos. En otras palabras, los inversores racionales y adversos al riesgo sólo estarían dispuestos a asumir mayores riesgos si esperan ser compensados con rendimientos favorables.

Para que los mercados financieros funcionen es necesario que la información sobre los activos financieros que se negocian esté disponible para todos los participantes al mismo tiempo y de la misma forma, con el fin de que nadie pueda aprovecharse de información obtenida.

Cabe indicar que si, las inversiones son del mismo tipo, sector económico o área geográfica del portafolio se considera que su nivel de riesgo es altamente concentrado y expuesto a una mayor “volatilidad”. El gran problema con un portafolio altamente concentrado es que su riesgo es más alto, aunque las inversiones sean relativamente conservadoras.

Cuando los mercados pueden asegurar que la participación de los inversionistas es igualitaria se dice que los mercados son *eficientes*. Un mercado eficiente es un mercado en el que nadie tiene ventaja sobre los demás participantes. Sin embargo, no todos los mercados son eficientes todo el tiempo. La eficiencia no es una característica que se pueda decretar, sino que hay que crear las condiciones para que se produzca.

2.5.1 Mapas de indiferencia de riesgo – rendimiento

Si se considera que hay un conjunto eficiente de combinaciones de cartera, ¿Que cartera debe escoger un inversionista? Para ello, se debe conocer su actitud hacia el riesgo o la función combinatoria del riesgo – rendimiento.

La función principal de un inversionista se basa en el concepto económico de las curvas o mapas de indiferencia que representa la compensación entre riesgo y rendimiento para distintos niveles de satisfacción de cada inversor. Esto significa que la selección de su portafolio de inversiones estará dada por aquella combinación de activos que brinden el rendimiento y el riesgo deseado.

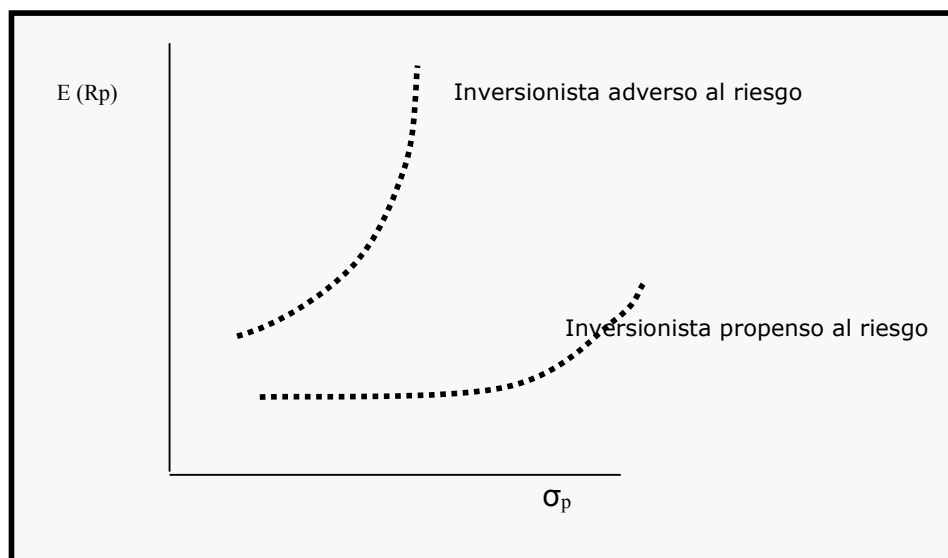
De igual manera se puede definir las combinaciones de activos que definan portafolios de inversión “óptimos”, es decir, que ofrezcan el mayor rendimiento con el menor riesgo. El punto donde ambas curvas sean tangentes será el que defina cuál es el portafolio de inversiones (o cartera óptima) más adecuado para el inversor. En general, podemos agrupar a los distintos perfiles de inversión en tres categorías según su grado de aversión al riesgo.

Los requisitos empleados para clasificar el perfil de riesgo del inversor varían con el tiempo, debido a las condiciones de mercado y sobre todo con las

expectativas de mercado para el futuro. Así, para un inversor de corto plazo, un rendimiento esperado del 10% puede ser conservador si las expectativas son de una fuerte subida en los mercados, pero puede ser considerado agresivo si se esperan caídas de precios generalizadas. Cuando la inversión apunta más al largo plazo comienzan a ser relevantes otros parámetros, como son:

- Edad del inversor: No tendrá el mismo grado de aversión al riesgo un joven de 25 años que un hombre de 55 años.
- Objetivo de la inversión: plan de retiro, seguro de vida, ahorro para la jubilación, etc.
- Personas a cargo, grado de conocimiento del mercado financiero, ingresos mensuales, tipo de actividad que desarrolla.

En este caso, es fundamental la actitud que el sujeto financiero tenga ante el riesgo, ya que de dicho comportamiento va a depender de la solvencia en el mercado. Se observa en la grafica 8, que cuanto mayor sea el nivel de rentabilidad media que el inversor exige por soportar una unidad adicional de riesgo, mayor es su aversión al riesgo. En cambio, el inversionista propenso al riesgo, esta dispuesto a correr mayores riesgos aunque su nivel de rendimiento sea mínimo.

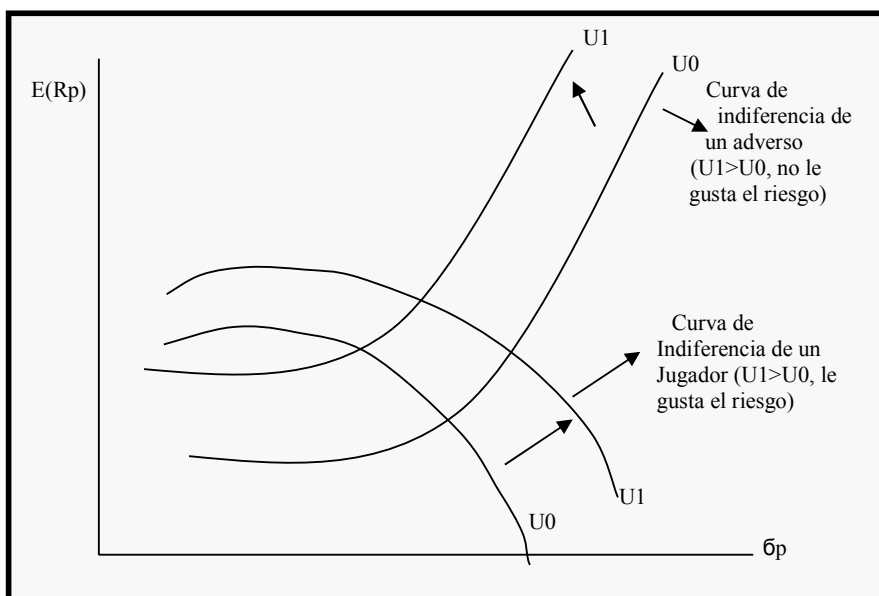


Grafica No. 8. Posición del Inversionista

Las preferencias de los inversionistas están representados a través de las curvas construidas en forma tal que cada curva individual representa diferentes

combinaciones de riesgo y rendimiento. En la grafica 9, se muestra las curvas de indiferencia graficadas en el espacio media- varianza para un individuo adverso al riesgo tendrán pendiente positiva, ya que al mismo retorno esperado va a preferir una menor varianza.

Del mismo modo para un propenso al riesgo tendrá pendiente negativa y para un neutral al riesgo tendrá pendiente cero, ya que le da lo mismo la varianza del portafolio. Adicionalmente, los inversionistas tienen una función de utilidad que depende del retorno y del riesgo del portafolio.



Grafica No. 9.- Curva de indiferencia en función a la Utilidad

La función de utilidad describe las preferencias de un inversor. En la inversión en cartera se supone que la utilidad del inversor depende únicamente de dos parámetros o características de la variable aleatoria rentabilidad, los cuales son:

- el rendimiento medio esperado (medido por la esperanza matemática) y
- el riesgo (medido por la varianza).

De acuerdo con esto, el inversor actúa presionado por dos fuerzas de sentido opuesto traducidas en: la satisfacción que le produce la renta que espera obtener y la insatisfacción derivada del riesgo que la obtención de esa renta origina.

Su función de utilidad viene dada por $U = f(E^R, \sigma^R)$, donde U es el índice de utilidad o satisfacción, f es el operador de la función de utilidad y E^R y σ^R son las variables explicativas.

De acuerdo con este aspecto, puede observarse que las líneas de indiferencia se sustentan en la teoría de la utilidad. De hecho, como lo señala De Pablo y Ferruz [17] que estas líneas pueden presentar, las siguientes características:

- Son crecientes, ya que un incremento del riesgo debe implicar necesariamente un incremento en la rentabilidad esperada de la inversión.
- Son curvas y son convexas, es decir, conforme aumenta el riesgo asociado a la inversión, el incremento de rentabilidad es proporcional.

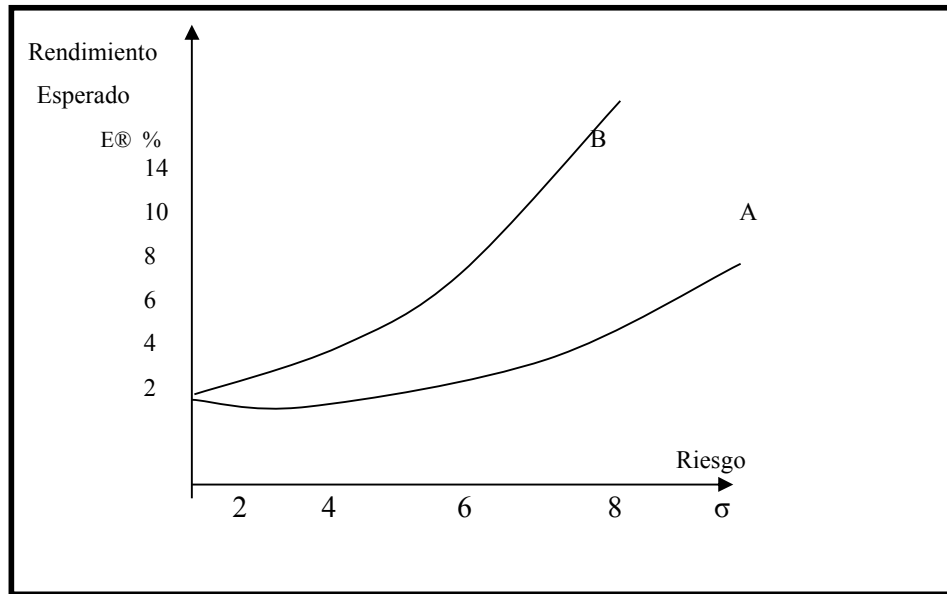
Cada curva expresa un nivel distinto de satisfacción del inversor. Dicho nivel será mayor cuanto más alejada esté la curva del eje de abscisas. Todas las curvas del mapa cortan al eje de ordenadas en la zona positiva del mismo. No se pueden cortar dos líneas entre sí, ya que de lo contrario el punto de corte expresaría distintos niveles de satisfacción para el inversor, lo cual no puede aceptarse. Mientras más incertidumbre hay, más dispersión puede haber en los posibles resultados, y el riesgo es mayor.

Por esta razón la desviación estándar de la distribución de probabilidad de los rendimientos esperados es una buena representación del riesgo.

En la grafica **10**, podemos ver que cuando hay certeza absoluta (la desviación estándar es cero y la inversión es libre de riesgo) podríamos conformarnos con un rendimiento bajo (por ejemplo en este caso de 4%).

El individuo B espera, para una σ_p de 4% un rendimiento de 10%, mientras que A espera solo 6%, lo que quiere decir que B evita más el riesgo que A.

También podemos ver que a B le es indiferente tener una inversión libre de riesgo que le dé un rendimiento de 4%, o una que le dé un rendimiento esperado de 6% cuando σ_p es 2%, ó un rendimiento esperado de 10% cuando σ_p es 4%.



Grafica 10 Curva de indiferencia para el riesgo y para la tasa esperada

Vemos que podemos establecer, que el rendimiento esperado va aumentando conforme aumenta el riesgo y de una forma no lineal, pues si el riesgo percibido aumenta es probable que el rendimiento esperado aumente todavía más.

Podemos también decir que el rendimiento esperado está compuesto por un rendimiento libre de riesgo más una prima que va en función del riesgo que se corre.

Por otro lado, hay en el mercado diferentes y muchas posibilidades de inversión, como se puede ver en la Grafica 11 (zona sombreada), que si las unimos con la curva de indiferencia del individuo, le dan a este el mejor rendimiento posible E^R en el punto N, en que su curva de indiferencia es tangente a la del mercado.

Sin embargo, el inversionista puede tener mejores alternativas de inversión, si es capaz de alcanzar una curva de indiferencia tal que partiendo del punto L_r (rendimiento libre de riesgo), pueda llegar hasta el punto M siguiendo la recta entre L_r y Z, que le da el máximo rendimiento alcanzable.

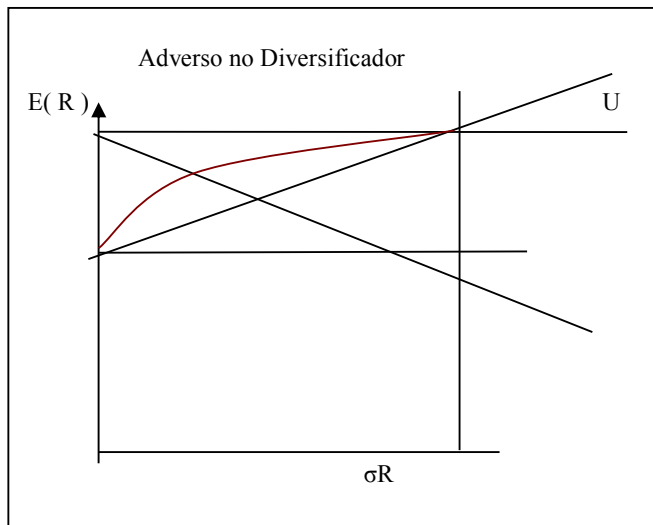
A su vez, el individuo puede ser diversificador o no diversificador. Le llamaremos diversificador al individuo que diversifica su portafolio, es decir, que

no gasta toda su riqueza exclusivamente en bonos o exclusivamente mantiene dinero.

Para que el adverso al riesgo sea no diversificador debe suceder lo contrario, es decir, las curvas de indiferencia deben ser convexas hacia arriba. Gráfica 12 Matemáticamente:

$$\frac{\frac{-d^2U}{d\sigma_R}}{\frac{dU}{d\mu_R}} \quad \text{Mide la concavidad de a curva de indiferencia, entonces si esta relación es:}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} > 0 & \text{el adverso es diversificado} \\ < 0 & \text{el adverso es no diversificador} \end{array} \right.$$



Gráfica No. 12 - Adverso al riesgo no diversificado

Para que un adverso al riesgo sea diversificador, es condición necesaria que sus curvas de indiferencia sean cóncavas hacia arriba. Intuitivamente, su punto de mayor utilidad esperada va a estar en un punto intermedio de la línea de oportunidades “porque prefiere diversificar”. Gráfico 13

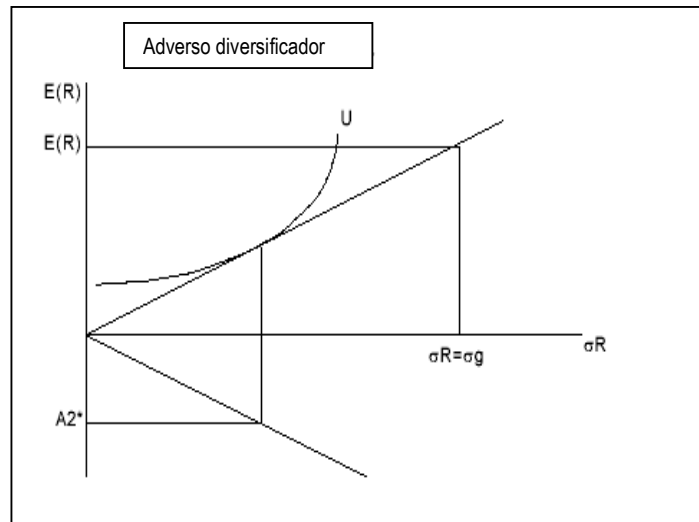
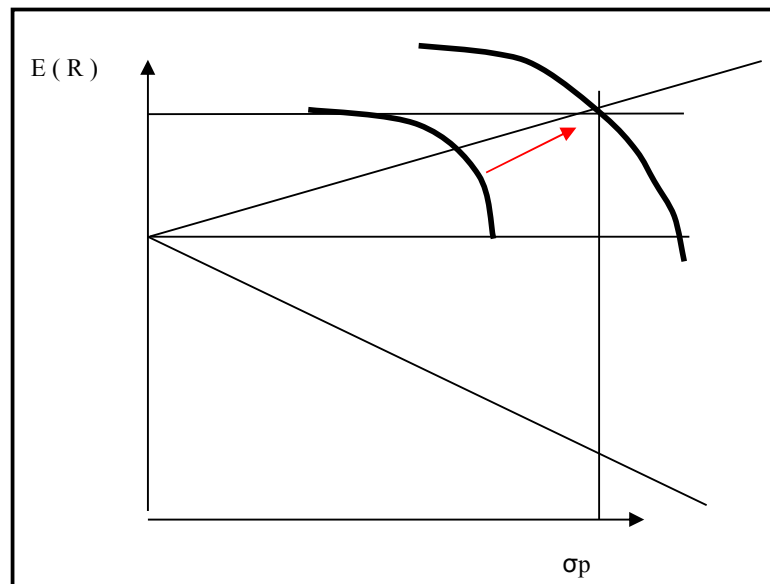


Grafico No.13 Aversión al riesgo diversificado

En el caso de un propenso al riesgo, éste siempre será no diversificador, puesto que asumirán siempre el máximo riesgo posible. Gráfico 14.



Grafica No. 14 Propenso. No diversificador

2.5.2 Características del modelo de indiferencia para la elección entre riesgo y rendimiento.

Como ocurre en la teoría general de la demanda del consumidor, el enfoque de la cartera tiene dos elementos principales. Un elemento es el de las

oportunidades disponibles para el individuo, el otro es el de los objetivos y las preferencias del individuo.

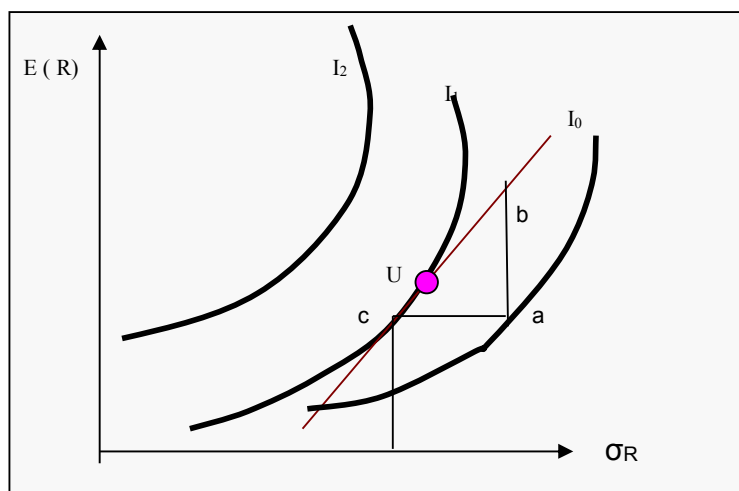
En el caso del problema de elección entre dos bienes se determina que el mapa de indiferencia resultante para el sujeto es convexo y tiene las características siguientes:

- Las curvas de indiferencia tiene pendiente negativa, es decir es negativa la tasa marginal de sustitución de un bien por otro.
- El nivel de utilidad de las curvas es mayor mientras más hacia arriba y a la derecha se encuentren éstas en el diagrama.

Teniendo en cuenta estas condiciones la tasa marginal de sustitución subjetiva de rendimiento por riesgo ($TMSS_{R \times}$) es la tasa de cambio de rendimiento por riesgo que el inversionista está dispuesto y en capacidad de aceptar. Esta se encuentra definida por la pendiente de la curva de indiferencia, y representa un reflejo de la forma en la que el inversionista **desea** intercambiar riesgo por rendimiento.

En la Grafica 14, se muestra tres curvas de indiferencia de un inversionista, I_0 , I_1 e I_2 , con niveles de satisfacción cada vez más altos. En el punto U de la curva I_1 , la línea trazada de forma tangencial a U indica la pendiente de la curva de indiferencia que se define como $TMSS_{R \times}$, en el punto U, donde la tasa de cambio viene dada por la relación de los segmentos (a,b) y (a,c).

La pendiente de curva de indiferencia es la tasa Marginal de sustitución subjetiva de rendimiento por riesgo y representa la forma en la que el Inversionista desea intercambiar estas dos condiciones de los activos financieros.



Grafica No. 14.- Curvas de indiferencia y niveles de satisfacción

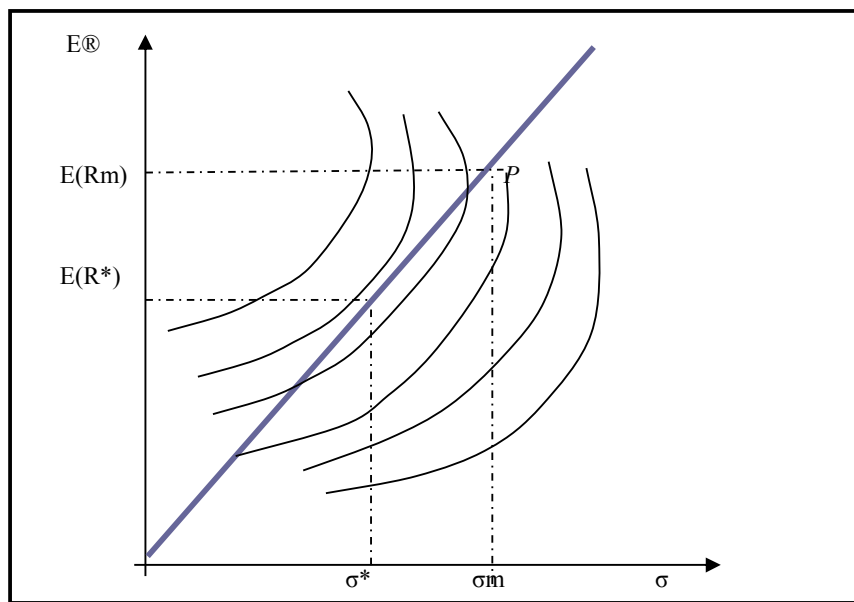
Únicamente un punto reunirá la condición de ser óptimo, este depende del *mapa de indiferencia* del inversionista, es decir, de su grado de aversión al riesgo.

El modelo de Tobin [38] es una aplicación directa del análisis anterior. Se considera que el riesgo es un mal y que el patrimonio es un bien. Entonces el individuo que debe hacer la elección se enfrenta al problema de decidir cómo distribuir su patrimonio entre dinero en efectivo con rendimiento cero y valores que proporcionan algún rendimiento pero también generan un riesgo.

Así, se supone que el rendimiento que se obtiene de un activo es aleatorio y se toma como medida de riesgo la varianza (σ^2). Es decir, la variación σ^2 es una medida del riesgo y por lo tanto de la incertidumbre.

De esta manera, se va crear un mapa de indiferencia donde se tiene el incremento esperado en el patrimonio $E(R)$ sobre el eje vertical y el riesgo σ en el horizontal. Las curvas de indiferencia son ahora un reflejo de la actitud del sujeto en cuanto al riesgo. Para este caso, la pendiente positiva creciente de las curvas de indiferencia significa que para que el sujeto acepte más riesgo en un momento dado y se mantenga la condición del rendimiento esperado de la inversión, se requiere mantener su patrimonio disponible y una actitud positiva frente al riesgo.

Esta situación se muestra en la Grafica 15 y la línea “ p ” que aparece en el mapa corresponde al presupuesto del individuo que en este modelo se considera la única restricción.



Grafica No. 15.- Mapa de indiferencia

Entonces, la solución al problema de elección entre riesgo y rendimiento esta reasentada por el punto $(E(R^*), \sigma^*)$ que es donde existe tangencia entre la restricción presupuestal y la curva de indiferencia con mayor nivel de utilidad que intersecta a dicha limitación presupuestal.

De acuerdo al modelo de Tobin se puede concluir que la incertidumbre obliga a una diversificación de la cartera para distribuir el riesgo entre los distintos activos, pero que la diversificación depende en gran medida de la actitud particular del inversionista en cuanto al riesgo. Para este caso particular la pendiente positiva creciente de las curvas de indiferencia significa que para que el sujeto acepte mas riesgo en un momento dado y se mantenga la condición de indiferencia, el rendimiento esperado de la inversión correspondiente debe aumentar mas que proporcionalmente.

2.5.3 Algunas implicaciones del requisito de liquidez

Como se analizó anteriormente, el problema de la incertidumbre incide directamente en las utilidades de una inversión a través de movimientos aleatorios en el rendimiento de la cartera. Se vió cómo el riesgo de bajo rendimiento puede obligar a una diversificación de cartera. Sin embargo, el rendimiento aleatorio proveniente de las variaciones de tasas de interés y precios de activos, no sólo es la única fuente de incertidumbre que puede obligar a una diversificación de cartera, sino también el requisito de liquidez.

Puede existir una motivación de tipo especulativo, cuando se desaprovecha inversiones redituables por no tener liquidez en el momento oportuno.

Es muy difícil imaginar un caso en que un inversionista no tenga necesidades de gastar dinero simplemente para realizar sus transacciones diarias o cumplir con ciertas obligaciones particulares. ELBAUM[15]

El problema obviamente surge cuando no es posible precisar el momento en que será necesario hacer un gasto imprevisto.

Si el monto del gasto imprevisto excede al de los activos líquidos de las carteras habrá necesidad de vender activos menos líquidos generalmente incurriendo en una pérdida, ya sea por que se tengan que vender a un precio por debajo de su valor real o por incurrir en alguna cláusula del título.

Así los requisitos de liquidez inciden en primera instancia en las restricciones del modelo, afectando a las utilidades. Dos son los efectos que puede generar un mal cálculo de las necesidades de liquidez.

- 1) Si se estima un requisito mayor del necesario, significará un sacrificio en utilidades potenciales.
- 2) Si se subestima el requisito, se puede incurrir en pérdidas innecesarias al tener que vender activos menos líquidos a precios bajos.

Entonces, siempre es deseable diversificar la cartera, para incluir activos líquidos y poder así afrontar gastos imprevistos y anticiparse a la posibilidad de futuras alternativas de inversión que sean más redituables que las actuales.

De acuerdo a la *teoría de preferencia por la liquidez*, impulsada por Hicks [21], acepta la capacidad de las expectativas para influenciar la forma de la curva de rendimientos. Sin embargo, plantea que, en un ambiente de incertidumbre y aversión al riesgo, los agentes prefieren los activos de menor madurez por tener una mayor liquidez. Por lo tanto, los inversionistas aceptarán tener en sus portafolios títulos de largo plazo únicamente si dichos activos ofrecen una compensación (prima de liquidez) representada en una tasa de interés mayor, la cual debe hacer que el rendimiento de estos sea mayor al promedio de las tasas de corto plazo esperadas. Por tanto, la prima de liquidez ofrecida siempre será una función creciente del plazo al vencimiento.

Si los títulos de largo plazo no reconocen una prima de liquidez, los inversionistas preferirán mantener un portafolio de instrumentos de corto plazo para minimizar la variabilidad en su valoración mientras que los prestamistas preferirán contratar préstamos a largo plazo para garantizar su flujo de recursos.

Cuando se producen desequilibrios entre oferta y demanda de fondos estos se corrigen mediante la incorporación de una prima de liquidez a la tasa de interés de cada título. Por lo tanto, la teoría de liquidez plantea que la curva de rendimientos normalmente exhibirá una pendiente positiva, incluso si el mercado no espera cambios en las tasas de interés, invalidando parcialmente la teoría pura de las expectativas en el sentido que la tasa de interés implícita en la curva deje de ser un predictor óptimo e insesgado de las expectativas de la tasa de interés futura.

J. Tobin formula “*La teoría de la formación de carteras y del equilibrio en el mercado de capitales*” como consecuencia del estudio de la preferencia por la liquidez como comportamiento frente al riesgo.

La principal conclusión de Tobin es que la teoría de la aversión al riesgo explica la preferencia por la liquidez y la relación decreciente entre demanda de dinero y tipo de interés. Un descenso del tipo de interés de los activos monetarios con riesgo produce sobre la demanda de dinero un efecto renta (negativo) y un efecto sustitución (positivo), ya que un menor interés es un incentivo para aceptar un mayor riesgo, reduciendo el dinero en caja y comprando activos monetarios con riesgo, debido al juego del efecto sustitución. Sin embargo, un incremento del tipo de interés produce un efecto renta que le brinda a los inversores individuales la posibilidad de tener el mismo rendimiento con un menor riesgo, vendiendo una parte de sus activos individuales y manteniendo más dinero en caja.

Finalmente el enfoque de cartera nos permite establecer que la existencia de la incertidumbre no es una condición suficiente del deseo de conservar dinero, porque los efectos particulares de la incertidumbre dependen de la forma particular de las curvas de indiferencia. De tal manera, que cualquiera que sea la tasa de interés, el individuo que ama al riesgo mantendrá siempre toda la cartera en forma de títulos, a pesar de la existencia de la incertidumbre. Por lo tanto, la incertidumbre no es una condición suficiente para conservar saldos monetarios cuando existen títulos- valores como activos alternativos.

2.6 El efecto de la diversificación en el riesgo.

El trabajo de Markowitz fue decisivo para el desarrollo y práctica de la gestión financiera. El punto más atractivo para los inversores en su teoría fue la idea de la diversificación de una cartera de inversión, porque no demuestran simplemente una posibilidad teórica de reducir los riesgos de inversión (no sistemáticos), sino que dan recomendaciones de cómo lograr esto en la práctica.

El tema de la diversificación es un medio de reducción de los riesgos no sistemáticos a un nivel arbitrario bajo, medido en función de la varianza o de la desviación típica.

Las carteras más altamente diversificadas o carteras “óptimas” pueden ser definidas como carteras que:

- para un nivel de riesgo determinado, tienen el mayor rendimiento esperado;
- para cualquier nivel de rendimiento esperado, tienen el riesgo más bajo

Para que la diversificación funcione, no basta con añadir instrumentos a una cartera. En vez de ello, es necesario identificar las concentraciones de riesgo y reducirlas, añadiendo al mismo tiempo otros activos no correlacionados.

Diversificar el portafolio, significa invertir en distintos instrumentos a fin de reducir significativamente el riesgo. La diversificación de las inversiones y los vencimientos evitarán riesgos innecesarios en que la cartera de inversión pueda incurrir con respecto a ciertos tipos de valores, emisores o instituciones financieras individuales

El proceso de optimización busca encontrar la mejor combinación de inversiones para obtener el mayor rendimiento posible a un nivel de riesgo determinado. En pocas palabras, la idea es buscar portafolios más estables para el inversionista, sin afectar sus rendimientos. La construcción de un portafolio óptimo consiste en definir el perfil de riesgo del inversionista, es decir, cuánta volatilidad está dispuesta a asumir en el conjunto de sus inversiones.

Una vez que se realizan todos estos pasos y se definen los instrumentos que compondrán el portafolio, se procede a efectuar la inversión. Sin embargo, el trabajo no acaba aquí. Un portafolio debe ser revisado y balanceado al menos una vez al año para asegurarse de que todavía cumple con los objetivos del inversionista. Este proceso continuo es vital para mantener el portafolio optimizado en todo momento.

Puede definirse la volatilidad como una medida de la velocidad del mercado. La volatilidad puede usarse para medir el riesgo de mercado de un instrumento único o de una cartera de instrumentos. En la práctica, se calcula la volatilidad de todo tipo de variables aleatorias financieras: tasas de interés, tipo de cambio de una moneda, valor de un contrato de futuro, valor de mercado de una cartera y precio de las acciones, entre otros.

Si la empresa atraviesa dificultades, o sus resultados son muy difíciles de anticipar, es lógico esperar que los precios de sus acciones fluctúen más (sean más arriesgados) que los de una empresa más estable. Además, siempre existe el riesgo

de que una empresa esté dirigida por gestores poco honestos, que antepongan sus intereses personales a los de la empresa, produciendo catástrofes económicas o financieras. A este tipo de riesgo se le llama RIESGO ESPECÍFICO.

Riesgo no sistemático o riesgo específico

Consideremos el concepto de *Brealey y Myers* [7] “La cartera de mercado está formada por acciones individuales; entonces ¿por qué su variabilidad no refleja la variabilidad media de sus componentes? La respuesta es que la diversificación reduce la variabilidad. Incluso con una pequeña diversificación se puede obtener una reducción sustancial en la variabilidad.”

Esto tiene relación con el coeficiente de correlación mencionado en el punto anterior, según explica Pascale [32]: “...mientras menor sea la correlación entre los rendimientos de los activos, mayores serán los beneficios que se obtienen de la diversificación”.

La correlación entre los rendimientos de los activos es de vital importancia para el riesgo total de los portafolios.

El riesgo no sistemático o específico puede ser reducido mediante la diversificación. Sin embargo, no podemos eliminar por completo el riesgo, ya que permanecerá el riesgo sistemático, ya que es inherente al mercado en que se opera, y que no es controlable por medio de la diversificación. Por ejemplo, al comprar acciones de IBM, Ford, etc., eliminamos el riesgo inherente a cada una de estas empresas (riesgo procedente de su mercado, producto, etc.), pero no a los riesgos que afectan a todos los elementos de la cartera en forma general. Por el hecho de cotizar en bolsa, las acciones anteriores están sujetas a los vaivenes de la bolsa, que a su vez dependerán de diversos factores económicos.

El riesgo específico es diversificable, este se encuentra relacionado con factores internos del negocio, relativamente controlables, y puede ser anulado por el inversionista a través de la diversificación.

El riesgo no sistemático es la parte del riesgo total que depende únicamente de los factores internos de cada empresa o industria. Factores como la capacidad de dirección, nivel de endeudamiento o huelgas laborales no afectan al mercado en general, sino los valores particulares:

$$\text{RIESGO TOTAL} = \text{riesgo específico} + \text{riesgo sistemático}.$$

Riesgo sistemático

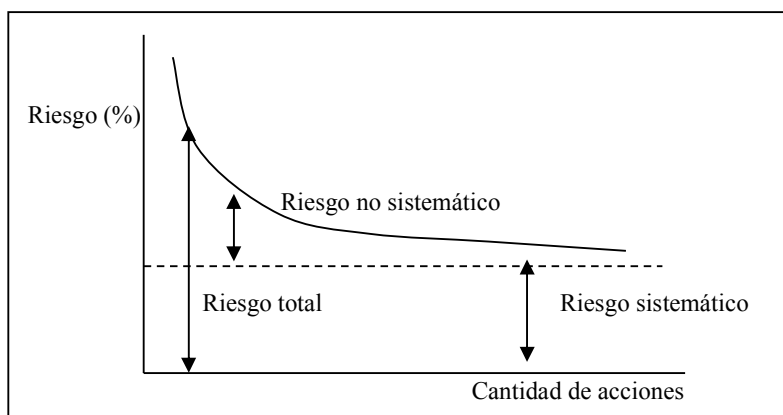
Se trata de uno de los riesgos que afectan al rendimiento de un valor mobiliario. En concreto, el riesgo sistemático o de mercado no depende de las características individuales del título, sino de otros factores como la coyuntura económica general, o acontecimientos de carácter político, que, a su vez, inciden sobre el comportamiento de los precios en el mercado de valores.

Entre los distintos tipos de *riesgo sistemático*, podemos mencionar los siguientes:

- Riesgo de inflación (tasa de inflación).
- Riesgo de interés (tasa de interés).
- Riesgo de cambio (tipo de cambio).
- Riesgo de reinversión (tasa de interés futura).
- Riesgo país (condiciones del país: riesgo soberano, riesgo político, riesgo de transferencia).

En lo que concierne al *Riesgo específico*, pueden ser:

- Riesgo económico (mercado, sector).
- Riesgo financiero (endeudamiento, calificación de crédito).
- Riesgo de crédito (crédito).
- Riesgo de liquidez (liquidez).



Grafica No. 16.- Comportamiento del riesgo a medida que se manejan nuevos activos

La división del riesgo total de una empresa, y por lo tanto del precio de sus acciones entre sistemático y no sistemático, es de importancia capital para entender los modelos básicos de gestión de cartera, debido al efecto que ejerce en la diversificación.

Los modelos para el mapa de las preferencias de los inversionistas también incluyen la hipótesis de que entre dos inversiones con igual riesgo, es decir con igual variabilidad o Varianza, se prefiere la que tenga más rendimiento esperado.

La varianza de un portafolio depende de la participación que cada título que lo compone o de que el valor total del portafolio y de las varianzas mantenga una relación determinada.

La varianza del portafolio se calcula a través de cuatro elementos, dos de los cuales son las varianzas de los títulos en sí mismos y dos son las correlaciones, una varianza respecto de la otra, de los títulos entre si.

El riesgo de un portafolio disminuye dramáticamente a medida que se aumenta el número de acciones o valores en el portafolio. Lo que sí es cierto es que después de que el número de los componentes de un portafolio haya crecido a cierto número es muy difícil obtener reducciones en la varianza.

Precisamente la llamada *diversificación* hace tender la varianza hacia un nivel en donde los elementos que la definen son en definitiva las correlaciones entre los títulos. En ese sentido, para un portafolio que tenga como componentes todos los títulos del mercado se obtiene un portafolio cuya varianza es determinada por la parte del riesgo que no puede disminuirse, debido a los efectos de la diversificación. La varianza resultante de este portafolio es la varianza del portafolio del mercado.

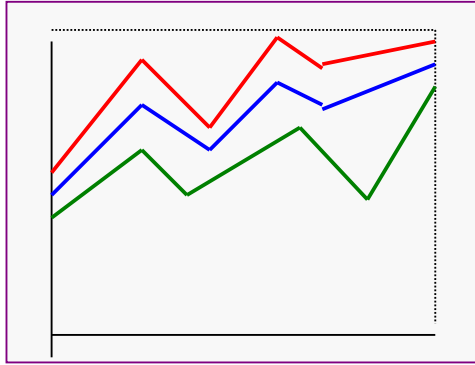
Cuando la cartera está bien diversificada, el riesgo no sistemático se reduce a cero, y la cartera queda únicamente con riesgo de mercado riesgo sistemático. Este no se puede evitar por mucho que se diversifique la cartera. El riesgo de una cartera bien diversificada depende del riesgo de mercado de los títulos incluidos en la cartera.

Siendo esta la razón por la cual los inversionistas están expuestos a la incertidumbre del mercado cualesquiera que sean las acciones que lo contengan.

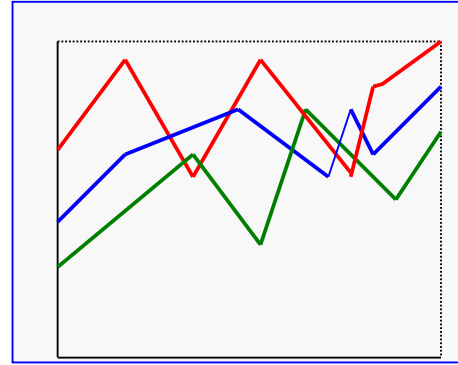
Para una cartera bien diversificada, únicamente será importante el riesgo del mercado. Por lo tanto la fuente de incertidumbre predominante para un inversionista que diversifica el riesgo radica en saber si el mercado sube o baja, ya que estas variaciones arrastraran con ellas a la cartera de inversionistas.

Diversificación

Grafica No. 17 y 18.- diversificación ineficiente y diversificación eficiente



Diversificación ineficiente (a)



Diversificación Eficiente (b)

- El grafico (a) por ejemplo, muestra activos combinados en 5.36% de riesgo
- El grafico (b) por ejemplo, muestra activos combinados con 3.31% de riesgo

CAPITULO III

MODELOS DE CARTERAS DE INVERSIÓN PARA CAMBIAR EL RIESGO

3.1 Evaluación de los modelos de cartera en condiciones de riesgo

3.1.1 Modelo de Markowitz para la selección de cartera.

3.1.1.1 Introducción.

En 1952, Harry M. Markowitz [25] publicó un artículo que es visto generalmente como el origen de la *teoría moderna de portafolios*. En ella establece que su metodología puede ser vista como un método de periodo sencillo, donde el inicio del periodo muestra que el inversionista puede tomar la decisión de comprar valores y mantenerlos hasta el periodo final, **esta decisión equivale a seleccionar el portafolio óptimo de un grupo de posibles portafolios**.

Al tomar la decisión inicial el inversionista debería reconocer que el rendimiento del activo (así como el rendimiento del portafolio) durante el periodo de posesión es desconocido. Sin embargo, el inversionista puede estimar el **rendimiento esperado** (o medio) de los activos que están siendo considerados y entonces, invertir en el que tenga el mayor rendimiento.

Markowitz hace notar que esta decisión es difícil ya que el inversionista típico desea que el rendimiento sea alto, pero, también quiere que el riesgo sea bajo. Esto significa que el inversionista buscará maximizar el rendimiento esperado mientras minimiza el riesgo (incertidumbre). El método de Markowitz, permite determinar cómo debe el inversionista tomar esta decisión tomando en cuenta estos dos objetivos. El hecho de tener este conflicto de objetivos hará que el inversionista deba diversificar su compra y no comprar únicamente un activo sino varios.

Markowitz desarrolla su modelo sobre la base del comportamiento racional del inversionista. Es decir, el inversionista desea la rentabilidad y rechaza el riesgo. Por lo tanto, para él una cartera será eficiente si proporciona la máxima rentabilidad posible para un riesgo dado, o de forma equivalente, si presenta el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad.

Harry Markowitz inició el campo llamado Teoría Moderna de la Cartera, proponiendo un modelo de programación cuadrática para seleccionar un portafolio diversificado de activos. El resultante modelo media - varianza es uno de los programas no lineales mas estudiados hasta el momento.

El supuesto fundamental en el que se basa su modelo, es el de que los inversionistas son esencialmente adversos al riesgo. Esto significa que los inversionistas deben ser compensados con mayor rendimiento para aceptar un mayor riesgo. Así por ejemplo, si se tiene dos opciones para invertir con igual tasa de rendimiento, un inversionista seleccionará un activo con un nivel menor de riesgo, rechazando la opción de mayor riesgo. Dicho en otras palabras el supuesto significa que el inversionista maximiza la utilidad esperada en lugar de solo tratar de maximizar los rendimientos esperados, es decir el inversionista tomara en cuenta el riesgo al seleccionar entre dos o más opciones de inversión.

Markowitz observó que un inversionista no sólo debe tener en cuenta su rentabilidad esperada más alta, sino también el riesgo que implica esta inversión, llevándolo a plantear el problema de minimizar las variaciones de un portafolio tomando como restricción el requerimiento de un retorno esperado. Es decir propuso un problema de programación cuadrática, el cual tenía como condición de primer orden el aumento marginal en la varianza, de invertir un poco más en un activo dado y debía ser proporcional al retorno dado. Esta variación depende tanto de la varianza del retorno del activo, como de la covarianza del retorno de todos los demás activos del portafolio. Esta se considera como la idea central de la contribución de Markowitz.

Markowitz centró su atención en la práctica habitual de la diversificación de carteras y mostró cómo un inversor puede reducir la desviación típica de las rentabilidades de una cartera eligiendo acciones cuyos cambios no sean paralelos. La rentabilidad de cualquier título o cartera es una variable aleatoria de carácter subjetivo, cuya distribución de probabilidad para el periodo de referencia es conocida por el inversor. La conducta del inversor lo lleva a preferir aquellas carteras con una mayor rentabilidad y menor riesgo.

En la primera etapa se determina el conjunto de carteras eficientes cuando proporciona la máxima ganancia para un riesgo dado, o bien, proporciona el mínimo riesgo para un valor dado de ganancia

Enfoque del modelo Media- Varianza de MARKOWITZ

Como es conocido, al realizar una inversión en activos financieros, se intenta obtener la máxima rentabilidad con el mínimo riesgo. El modelo de Markowitz permite determinar aquella composición de la cartera que proporcione este objetivo. Ya hemos visto, que las inversiones más rentables suelen llevar asociado un mayor riesgo así como que las inversiones menos arriesgadas suelen ofrecer una menor rentabilidad. Con este modelo se busca el equilibrio entre estos dos factores. A este modelo se le conoce también como modelo de inversión de dos dimensiones Media-Varianza

Markowitz elaboró un modelo para la obtención de una cartera óptima, considerando la conducta racional del inversor, que consiste en maximizar el rendimiento esperado y minimizar el riesgo. La cartera óptima es aquella que permite la mejor combinación de rentabilidad y riesgo dentro de los activos disponibles en el mercado. Combinando la cartera óptima con las preferencias del inversor, es decir, su aversión al riesgo, se obtiene la cartera óptima para cada inversor en concreto.

El *modelo* plantea la solución para encontrar las proporciones de una inversión que debe usarse para maximizar la rentabilidad a un nivel deseado de riesgo, o el equivalente, minimizar el riesgo a un grado de renta deseado.

El **modelo** utiliza datos históricos para hacer los cálculos necesarios, lo que abre un interrogante adicional: ¿Cuál debe ser el tiempo apropiado para que los resultados sean los más consistentes posibles?

Aunque matemáticamente esta pieza del **modelo no está formalizada**, lo aconsejable es mirar el largo plazo, donde la tendencia de los mercados puede identificarse, lo que permitirá usar un horizonte temporal en función al tiempo destinado para la inversión.

Las variables claves del **modelo** son la rentabilidad de los activos y el riesgo de cada uno de estos. El riesgo son las variaciones que pueden tener los rendimientos de una inversión.

Para medir el riesgo se usa la desviación estándar, la cual indica qué tan dispersos están los datos históricos de sus respectivas medidas muestrales; entre más dispersos estén los datos es más posible que el activo fluctúe, ya sea hacia arriba o hacia abajo, lo cual es incertidumbre para el inversor y se traduce en forma de mayor riesgo. Es necesario tener en cuenta que el riesgo guarda una relación directa con la rentabilidad, porque no tendría sentido para ningún inversor racional, comprar un activo con la misma rentabilidad que otro, pero con una mayor medida de riesgo, o viceversa, un activo con el mismo nivel de riesgo que otro, pero con una rentabilidad menor.

Para medir el riesgo de la cartera es necesario añadir otro elemento que estime la relación entre los activos, la correlación, la cual mide la relación que tienen los cambios de uno de los activos con respecto a otro.

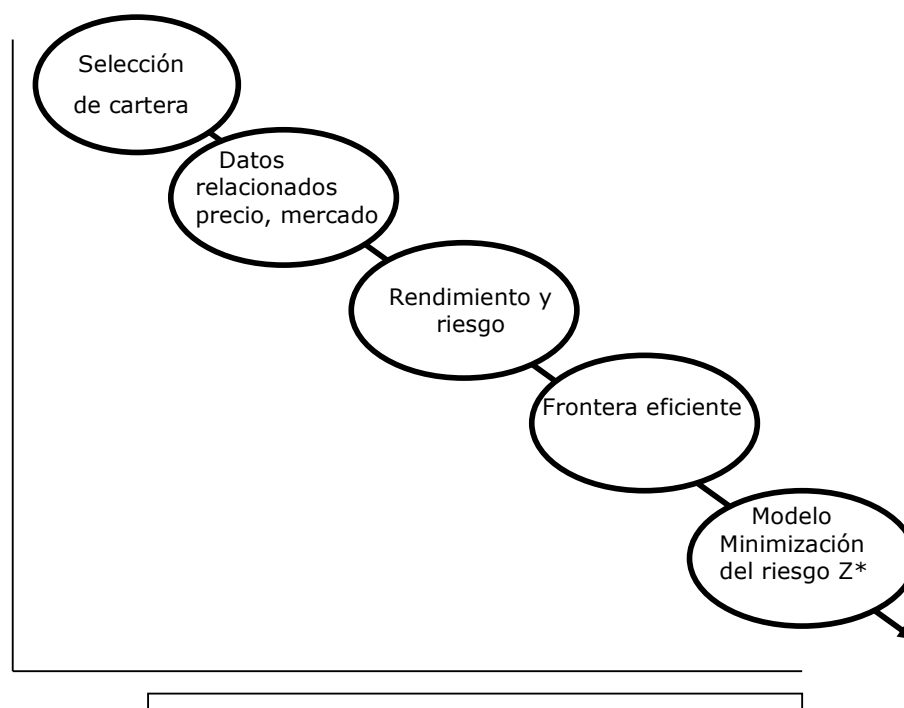
El modelo de la Media-Varianza (M-V) desarrollado por Markowitz constituye el punto de arranque de la Teoría de Selección de Carteras, modelo en el que se asientan los principios fundamentales en los que se fundamentan los desarrollos posteriores.

Este modelo mide la relación que existe entre el comportamiento de los activos financieros de la cartera, para determinar en una situación específica una

cartera, lo suficientemente diversificada para que el riesgo total sea menor que la suma ponderada de sus componentes, eso se hace mediante el cálculo de la covarianza y la correlación.

“La covarianza y la correlaciones suponen que las rentabilidades de los activos financieros se relacionan entre sí, la covarianza es una medida estadística de la interacción de dos títulos. La interacción se puede expresar en términos de correlación entre ellos.” (Brealey R.A.)[6].

Aquí se muestra el diagrama que describe el proceso de inversión por el método de Media – Varianza:



Grafica 19.- Proceso de optimización del riesgo

El objetivo es encontrar la Cartera “Óptima” de activos financieros; esto es, aquella cartera que, de acuerdo con la actitud del inversor frente al riesgo permita:

- Maximizar el rendimiento para un nivel de riesgo dado.
- Minimizar el riesgo para un nivel de rendimiento dado

El “Modelo de Markowitz” o “Modelo de Media-Varianza” también recibe el nombre de “*Modelo de Inversión de dos dimensiones*”, en el sentido de que la decisión del inversor respecto al diseño de su Cartera Óptima, se hace depender de dos variables de signo contrario como son el Rendimiento y el Riesgo.

Asumiendo la aversión al riesgo, Markowitz desarrolló su modelo de selección de carteras de inversión o de Media-Varianza, según los siguientes pasos:

1°.- Conducta racional del Inversor.

El inversor prefiere más riqueza, o sea mayor ganancia y menos riesgo. Por tanto, a la hora de seleccionar su Cartera de Activos Financieros, preferirá aquella cartera que le proporcione el *Rendimiento esperado más alto*. Adicionalmente, el inversor siente una aversión natural frente al riesgo, por ello preferirá aquellas carteras que minimizan el riesgo.

2°.- Respecto a las medidas de Rendimiento y Riesgo.

El rendimiento de cualquier activo o cartera de activos es descrito como una variable aleatoria, cuya función de distribución de probabilidad es conocida por el inversor para el periodo de referencia.

El valor medio o esperanza matemática de dicha variable aleatoria se acepta como medida del rendimiento de la inversión.

Como medida del Riesgo de la variable aleatoria “Rendimiento de un Activo o de una Cartera” se aceptan medidas de dispersión, esto es, la varianza o la desviación típica.

3°.- La conducta racional del inversor nos lleva a describir su Función de Utilidad en función de dos componentes de signo contrario:

- Componente positivo o Rendimiento
- Componente negativo o Riesgo

4°.- En la función objetivo de los problemas se indica la proporción del fondo del Inversionista que debe ser invertida en cada tipo de activo, de manera que se alcance la eficiencia, es decir, que maximice el rendimiento para un grado de riesgo dado o que minimice el riesgo para un rendimiento esperado dado.

El modelo media-varianza desarrollado por Markowitz se resume en dos supuestos fundamentales:

- 1.- El riesgo de un título o de la cartera, se mide a través de la desviación estándar del rendimiento de la inversión, cuya distribución de probabilidades es normal y conocida por el inversionista.

Este se refiere a que los retornos de la inversión presentan una distribución normal a través del tiempo, lo que permite que la media de estos retornos y la varianza de ellos describan adecuadamente el comportamiento de los retornos de los títulos.

- 2.- Los inversionistas son adversos al riesgo, esto implica que su curva de indiferencia es cóncava, con tasas de sustitución marginal de retorno y riesgo positivas, maximizando la utilidad y minimizando el riesgo.

Esto implica que todo inversionista es racional por lo que preferirá invertir en aquellos títulos que tengan un rendimiento esperado mayor y un mínimo riesgo.

Por lo tanto, su función de utilidad (U) estará definida por:

$$U = f(E_c, \sigma^2_c)$$

$$\frac{\partial U}{\partial E_c} \geq 0 \text{ Máximo rendimiento}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma^2_c} < 0 \text{ Mínimo riesgo}$$

Donde :

$E_c = E(R)$ es el rendimiento esperado para un inversionista racional

σ^2_c = representa la medida de riesgo

Este criterio permite comparar alternativas de inversión en base a la media y la varianza, es decir, se hace una comparación entre todas las alternativas existentes en el mercado, separando las alternativas eficientes e ineficientes. Si x e y son variables que representan los retornos de dos alternativas de inversión que cuentan con distribución normal, donde:

$$E(x) \geq E(y) \quad \text{ó} \quad E(x) > E(y)$$

$$\sigma^2(x) < \sigma^2(y) \quad \sigma^2(x) \leq \sigma^2(x)$$

Entonces existe la condición suficiente para que la alternativa de inversión x sea preferida a la alternativa y , puesto que x cuenta con un mayor o igual

rendimiento y un menor riesgo; o con un mayor rendimiento pero con un riesgo menor o igual.

Este **modelo** no proporciona una única respuesta, dado que existen diferentes tipos de inversores, agresivos, neutrales y adversos, con respecto al riesgo, pero sí encuentra el portafolio con las combinaciones exactas de cada activo que lo conforma, teniendo en consideración que para determinado nivel de rentabilidad esperada deberá conseguirse un mínimo riesgo.

Esto se logra mediante un proceso de optimización de la función objetivo. El conjunto de portafolio que tiene un nivel de rentabilidad cualquiera y mínimo riesgo conforma la **frontera eficiente**. Ninguna otra combinación por debajo de la **frontera** es válida para los inversores racionales. Como medida adicional proporcionada por el **modelo** se encuentra una línea tangente a la **frontera eficiente**, que parte del eje de los retornos. El punto de la **frontera eficiente**, que es tangente a esta línea, indica la combinación óptima entre las carteras y un activo sin riesgo.

De ese punto de vista y dependiendo del nivel de tolerancia que tenga cada inversor al riesgo, se desplaza sobre la **frontera eficiente**, ya sea en busca de un nivel de rentabilidad esperado, o hacia un punto de riesgo (desviación estándar) deseado. El siguiente gráfico muestra esta condición.

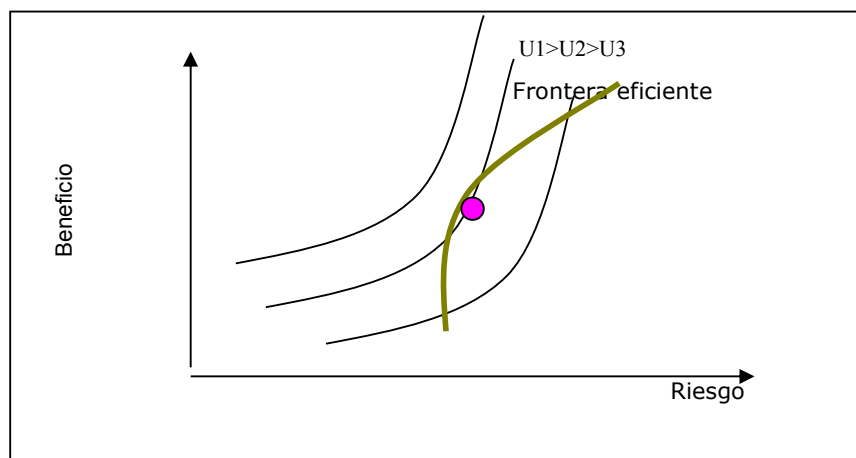


Gráfico No. 20. (Frontera de Eficiencia)

La relación entre beneficio esperado y varianza del beneficio se denomina frontera riesgo-beneficio o frontera eficiente y representa la relación entre el valor esperado de un resultado y una medida de riesgo. De acuerdo a esta teoría un

inversor escogerá una cartera en esta curva, recurriendo a otros criterios para elegir entre las posibles carteras.

La selección de una determinada combinación de “Ganancia - Riesgo”, dependerá de la mayor o menor aversión al riesgo del inversionista.

$$U(\text{Inversor}) = f(E[R_p], \sigma_p^2)$$

donde:

$U(\text{Inversor})$ = Función de utilidad del Inversor.

$E[R_p]$ = Rendimiento esperado de la Cartera de Valores.

σ_p^2 = Riesgo de la Cartera de Valores expresado como varianza del rendimiento.

De tal manera que se cumple :

$$\frac{\partial U}{\partial E[R_p]} > 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma_p^2} < 0$$

El Análisis M-V es una metodología matemática que permite discriminar entre alternativas riesgosas, seleccionar los portafolios de alternativas óptimos económicos y construir una Frontera M-V a través de la cual se sitúan estas combinaciones seleccionadas. Del mismo modo, con el Análisis M-V es factible seleccionar portafolios, sujetos a la Frontera M-V, que maximicen la utilidad (satisfacción) esperada de un tomador de decisiones o decisor. (Gráfico No. 21).

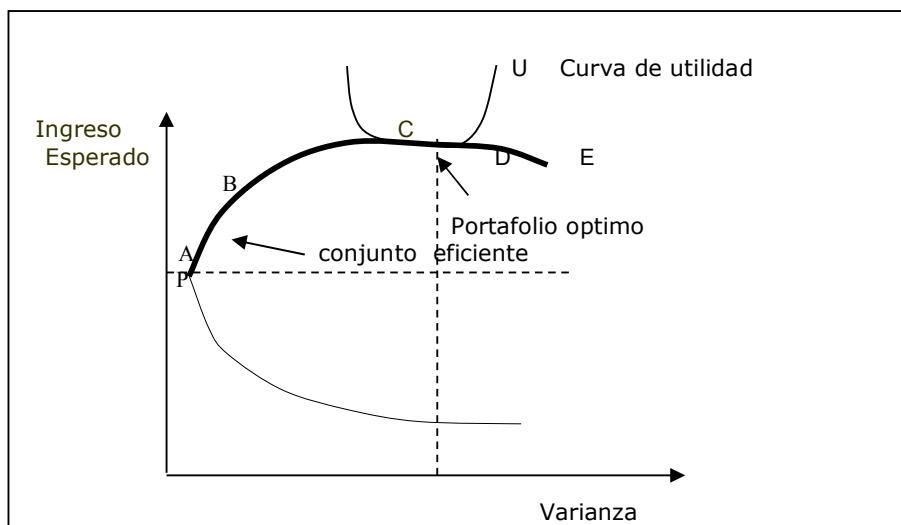


Gráfico No. 21 Frontera M-V de portafolio óptimo

En consecuencia:

- Dado un nivel de riesgo, a mayor rendimiento mayor utilidad.
- Dado un nivel de rendimiento; a mayor riesgo menor utilidad.

Para plantear el modelo vamos a suponer que contamos con n activos financieros, y que conocemos la tasa anual promedio del rendimiento $E(R_i)$ y la desviación estándar σ_i para cada activo i . Supongamos también que conocemos el coeficiente de correlación ρ_{ij} entre las tasas de rendimiento de los activos financieros ij . Si asignamos una proporción X_i de nuestro capital en el activo i , entonces la media y la varianza de la tasa de rendimiento anual de la cartera queda expresada como:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n X_i E(R_i)$$

Donde; $E(R_p)$ = esperanza del rendimiento de la cartera

El riesgo de una cartera se medirá a través de la varianza del rendimiento de la misma de la siguiente forma (X_i es la ponderación de cada título).

$$\text{Min } \sigma_p^2 = \sum_i \sum_j X_i X_j \sigma_{ij}$$

Donde:

σ_p^2 = varianza del rendimiento de la cartera

σ_{ij} es la covarianza entre los rendimientos de los valores i y j

El conjunto de carteras eficientes puede calcularse resolviendo el siguiente programa cuadrático paramétrico, que se muestra en el cuadro:

	Programa 1	Programa 2
Función Objetivo	$\text{Max } E_p = \sum_{i=1}^n X_i E(R)_i$	$\text{Min } \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij}$
Restricciones paramétricas	Sujeto a: $\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \sigma_{ij} = V^*$	Sujeto a: $E(R_p) = \sum_{i=1}^n X_i E(R_i) = E^*$
Restricciones presupuestarias	$\sum_{i=1}^n X_i = 1$	$\sum_{i=1}^n X_i = 1$
No negatividad	$X_i \geq 0$	$X_i \geq 0$

Nota:- La propuesta anterior es equivalente en su forma compacta

$$\text{Max } \sum X_i E_i - \lambda \sum X_i \sigma_{ij} X_j$$

s.a

$$\sum X_i = 1$$

$$X_i \geq 0 \quad i \in I$$

Esta última es la formulación media - varianza más empleada. El problema resultante es la programación cuadrática con incertidumbre en los coeficientes de la función objetivo. Es también paramétrico, siendo λ el parámetro denominado *aversión al riesgo* que representa el compromiso entre el riesgo (varianza) y beneficio. Donde:

X_i es la proporción del presupuesto del inversor destinado al activo financiero i e incógnita del programa.

$\sigma^2(\mathbf{R}_p)$ la varianza de la cartera p

σ_{ij} , la covarianza entre los rendimientos de los valores i y j .

$E(\mathbf{R}_p)$ es la rentabilidad o rendimiento esperado de la cartera p , de tal forma que al variar el parámetro E^* obtendremos en cada caso, al resolver el programa, el conjunto de proporciones X_i que minimizan el riesgo de la cartera, así como su valor correspondiente.

El conjunto de pares $[E(\mathbf{R}_p), \sigma^2(\mathbf{R}_p)]$, o combinaciones rentabilidad-riesgo de todas las carteras eficientes, es denominado «frontera eficiente». Una vez conocida ésta, el inversor, de acuerdo con sus preferencias, elegirá su cartera óptima. Esto quiere decir:

Programa 1: busca el máximo rendimiento esperado para un riesgo fijo.

Programa 2: busca el mínimo riesgo para un rendimiento esperado concreto.

Ambos con las siguientes restricciones:

- La cantidad total a invertir es 1 (100% del dinero que tenemos).
- Ninguna inversión puede ser negativa.

El resultado de ambos programas será el conjunto de carteras eficientes, que tienen la forma de curva convexa o *frontera eficiente* por estar formada por la totalidad de carteras eficientes. Dicho de otro modo en la frontera eficiente están

todas aquellas carteras que proporcionan una rentabilidad máxima para un determinado riesgo o un riesgo mínimo para un determinado rendimiento.

Finalmente, se debe entender que la rentabilidad del accionista es la relación que se establece entre lo que se ha invertido en una determinada acción y el rendimiento económico que produce en el mercado de valores.

3.1.1.2 Hipótesis

El método de Markowitz inicia definiendo en forma específica cuál es el rendimiento inicial y final de la cartera o valores de inversión y finaliza recomendando una cartera al inversionista.

El modelo de Markowitz parte de las siguientes *hipótesis*:

- 1- La rentabilidad de cualquier título o cartera, es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad para el periodo considerado es conocida por el inversor. Se acepta como medida de rentabilidad de la inversión **“la media o esperanza matemática”** de dicha variable aleatoria.
- 2- Se acepta como medida del riesgo la dispersión, medida por la **varianza o la desviación estándar** de la variable aleatoria que describe la rentabilidad, ya sea de un valor individual o de una cartera.
- 3- El inversor elegirá aquellas carteras con una mayor rentabilidad y menor riesgo.
4. El inversionista invierte en una cartera eficiente.

El inversor se encuentra presionado por dos fuerzas de sentido opuesto:

- a- Deseo de obtener ganancias y
- b- La aversión al riesgo

Por lo que el objetivo, es determinar empíricamente la aplicabilidad de esta teoría en el Mercado de Valores Peruano, es decir, probar las hipótesis:

H_0 : El modelo de Markowitz es aplicable en Mercado de Valores Peruano

Si se toma en cuenta lo mencionado en el marco teórico de este trabajo, se puede afirmar que el Método Media – Varianza de Markowitz es uno de los principales modelos a utilizar para determinar la cartera óptima de inversión en estudio. Lo anterior lleva a establecer que dicho modelo es aplicable en la medida que contemos con un mercado de valores alternativo para el inversionista que espera rendimientos favorables frente al riesgo.

Esta afirmación será empleada para probar la aplicación empírica de nuestro modelo teniendo como base la tendencias del mercado financiero y bursátil., donde la regla de decisión será obtener si los rendimientos de las acciones representadas a través de los portafolios y su comportamiento es muy significativo para las futuras inversiones.

Aunque debemos reconocer que el mercado de capitales peruano es pequeño y muy concentrado, estas no son razones suficientes para abandonar la aplicación de la teoría de portafolio en el caso peruano.

3.1.1.3 Cálculo del rendimiento inicial y final.

Para un periodo como el que fue definido el rendimiento de un activo se calcula mediante la siguiente ecuación.

$$R_p = \frac{w_1 - w_0}{w_0}$$

Donde W_0 denota el precio del activo (o portafolio) a t_0 y W_1 es el precio al final del periodo de posesión. De acuerdo con Markowitz, el inversionista deberá observar el rendimiento asociado con cualquiera de estos portafolios también llamado **variable aleatoria**, así como las variables: el **valor esperado** (o media) y la **desviación estándar**. Markowitz establece que el inversionista debe basar su selección del portafolio únicamente en estas variables. Esto es, el inversionista debe estimar el rendimiento esperado y la desviación estándar de cada portafolio y entonces escoger el “mejor” basado en los valores o magnitudes relativas de estos dos parámetros, ya que el rendimiento esperado puede ser visto como la medida de la recompensa factible y la desviación estándar como la medida del riesgo asociada a cualquier portafolio. Así pues, si la recompensa y el riesgo de todos los portafolios posibles son calculados el inversionista estará en posición de identificar su portafolio preferido.

El rendimiento de las acciones se calcula determinando la variación porcentual de los precios de las acciones entre dos periodos mediante la ecuación siguiente: Caso Minera Atacocha, según Tabla No. 3 (Pág. 212)

$$Rp = \frac{\text{cotización } t - \text{cotización } t-1}{\text{cotización } t-1} =$$

$$Rp = \frac{w_1 - w_0}{w_0} = \frac{12.64 - 12.00}{12.00} = 0.05333 \text{ o } 5.33\%$$

En este cálculo se determina el rendimiento del periodo del 7 al 12 de Enero de 2001 para las acciones de la Minera Atacocha (5.33%). Algunos de los resultados obtenidos para otras acciones del Mercado de Valores Peruano se presentan en términos relativos.

3.1.1.4 El rendimiento esperado.

Una vez determinados todos los valores que puede tomar la cartera, calculamos el **rendimiento esperado o medio**:

La rentabilidad de una cartera será igual a la media ponderada de las rentabilidades de los activos que la componen. Se ponderarán las rentabilidades por el peso específico que cada activo tiene en la cartera.

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i R_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i E(R_i)$$

$$E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + \dots + w_n E(R_n)$$

Donde:

$E(R_p)$ es el rendimiento esperado de la cartera

Riesgo de una cartera

El riesgo de una cartera formada por dos valores viene dado por la expresión:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2(R_i) \quad \text{de donde} \quad \sigma_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (R_{it} - E(R_i))^2$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^n [R_{it} - E(R_i)][R_{jt} - E(R_j)]}{n} = \rho_{ij} \cdot \sigma_i \sigma_j$$

La covarianza nos dice en qué medida dos acciones se mueven en el mismo sentido; si la covarianza es positiva, quiere decir que cuando la rentabilidad de una acción sube, la de la otra también sube; si la covarianza es negativa, quiere decir que cuando la rentabilidad de A sube, la de B baja. Si la covarianza es próxima a cero, quiere decir que las dos acciones son independientes. En general

$$\sigma_p^2 = w_a^2 \cdot \sigma_a^2 + w_b^2 \cdot \sigma_b^2 - 2 \cdot Cov_{a,b}$$

3.1.1.5 Cálculo del coeficiente de correlación (ρ_{ij}).

Este coeficiente está relacionado fuertemente con la covarianza, y se calcula dividiéndola entre las desviaciones estándar de las dos variables:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

3.1.1.6 Cálculo de Beta (β).

Toda inversión tiene dos componentes de riesgo, el primero se refiere al riesgo diversificable, que depende de la propia inversión y que está relacionado con la empresa y el tipo de sector en el cual se invierta, y el segundo es el riesgo no diversificable, que es establecido por el mercado en general y afecta a todas las inversiones del mercado.

La letra griega beta (β) es utilizada para referirse a la **covarianza normalizada** de un título con la cartera del mercado, es decir mide el **riesgo del mercado** de una acción o valores.

β - Este es el término con el que se le denomina a la pendiente del modelo de mercado y representa la sensibilidad de la acción a los cambios en el índice del mercado. Se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$\beta = \frac{\sigma_{Ii}}{\sigma_I^2}$$

Donde σ_{Ii} denota la covarianza de los rendimientos de una acción I y el índice de mercado, y σ_I^2 la varianza del mercado.

Así un inversionista individual se sirve de la Beta para evaluar el riesgo del mercado y su efecto sobre el rendimiento esperado de un título.

En la toma de decisiones respecto a las inversiones, se logra minimizar el riesgo si se realiza una eficiente diversificación del riesgo y una correcta medición del riesgo no diversificable.

De tal manera, la medida del **Riesgo no diversificable** viene dada por Beta (β), que vincula los retornos del mercado con los de una inversión para un periodo dado.

El significado del valor de Beta se muestra en el cuadro siguiente:

Valor de Beta	Significado
Beta = 1	<p>Para una sola acción: es una acción típica o de riesgo promedio. Tiende a variar en la misma medida y dirección del mercado.</p> <p>Para una cartera: la cartera es tan volátil como el mercado, tiende a variar en la misma medida y dirección que el mercado. Puede ser la cartera del mercado.</p>
Beta > 1	<p>Para una acción: Es una acción más volátil que el mercado. Tiende a variar más que el promedio del mercado y en la misma dirección. Esto puede ocurrir con una acción especulativa con tendencia pro cíclica.</p> <p>Para una cartera: la cartera es más volátil que el mercado. Esto puede ocurrir con una cartera de acciones especulativas con tendencias pro cíclicas (o sea que depende mucho de los ciclos del mercado).</p>
Beta < 1	<p>Para una acción: Es una acción menos volátil que el mercado. Tiende a variar menos que el promedio del mercado y aunque en la misma dirección. La acción puede tener características propias que la hacen más riesgosa.</p> <p>Para una cartera: Es una cartera menos volátil que el mercado. Tiende a variar menos que el promedio del mercado y aunque en la misma dirección. Esto puede ocurrir si se combinan acciones pero que al diversificar elimina el riesgo particular dejando bajo el riesgo del mercado.</p>
Beta 0	Implica que un título no depende en lo absoluto de lo que pasa en el mercado. Suele ser un título libre de riesgo como los bonos del tesoro.
Beta < 0	Es muy raro para una acción. Implica que la acción o la cartera tienden a moverse en sentido contrario al mercado.

3.1.1.7 Cálculo y división del riesgo

El coeficiente de correlación (o determinación), tiene una interpretación bastante directa. Tomaremos como ejemplo las acciones de la empresa ALICORP. El coeficiente de correlación obtenido mediante el uso del Excel, indica que el 76.7 por ciento de la variabilidad de sus rendimientos se puede explicar mediante la variación del Índice de Precios y Cotizaciones. La parte restante, 23.6 por ciento

está relacionada con otros factores que no se especifican en esta ecuación. Para ALICORP resulta cierta la siguiente ecuación:

Riesgo total = riesgo sistemático + riesgo no sistemático

Utilizando la varianza como una medida de riesgo total también se tiene que:

$$\text{Var} = \rho_{ij}^2 \text{ var} + (1 - \rho_{ij}^2) \text{ var}$$

Utilizando los valores mostrados, se tiene que:

$$\text{Riesgo total} = \text{Var} = (0.767)^2(0.480) + (1 - 0.767^2) (0.480) = 0.480\%$$

De donde:

$$\text{Riesgo sistemático} = (0.767)^2(0.480) = 0.282\%$$

$$\text{Y el Riesgo no sistemático} = (1 - 0.767^2) (0.480) = 0.197\%.$$

Para la determinación del coeficiente de correlación, y coeficiente Beta, se ha tomado en consideración el Índice General de precios de la Bolsa de Valores de Lima, vigentes al periodo 2005 (datos promedios), que ha dado como resultado la siguiente Tabla No.5:

Tabla No. 5. Resumen del análisis de 10 acciones y el Índice General de precios de la Bolsa de Valores de Lima

	MINA	TELP	B&J	CAA	EDEL
Media E(Rp)	1.038	0.586	0.435	1.027	0.208
Varianza	0.315	0.131	0.187	0.336	0.178
Desviación estándar	5.61	11.44	4.332	5.80	0.422
Covarianza	0.012	-0.0146	0.0305	-0.001	0.001
C. Correlación	2.1	-2.27	12.54	-2.62	3.39
Beta	0.014	0.112	0.02344	0.0007	0.001
Riesgo Total	0.315	0.131	0.187	0.336	0.178
Riesgo sistemático	1.389	0.675	29.406	2.306	2.045
Riesgo no sistemático	-1.074	-0.544	-29.219	-1.97	-1.867

Continúa ..

	CAR	SOUP	LUZS	CEML	TUMA
Media E(Rp)	1.724	1.035	0.142	0.028	0.182
Varianza	1.384	0.31	0.01	0.247	1.127
Desviación estándar	11.76	5.56	3.09	4.971	10.62
Covarianza	-0.021	0.31	0.0002	0.0152	0.029
C. Correlación	-3.141	98.55	0.945	-5.45	4.890
Beta	0.16141	2.383	0.00015	0.117	0.223
Riesgo Total	1.384	0.31	0.01	0.247	1.127
Riesgo sistemático	13.654	3010.75	0.0089	7.336	26.948
Riesgo no sistemático	-12.27	-3010.44	0.0011	-7.089	-25.821

3.1.1.8 El teorema del grupo o frontera eficiente.

En el mercado de valores un grupo infinito de portafolios puede ser formado de un grupo de N activos. Sin embargo, un inversionista elegirá su portafolio óptimo de un grupo de portafolios que:

1. Ofrezca el máximo rendimiento esperado para diversos niveles de riesgo y
2. Ofrezca el mínimo riesgo para niveles diferentes de rendimientos esperados.

El grupo de portafolios que reúne estas dos condiciones se conoce como **grupo o frontera eficiente (FE)**

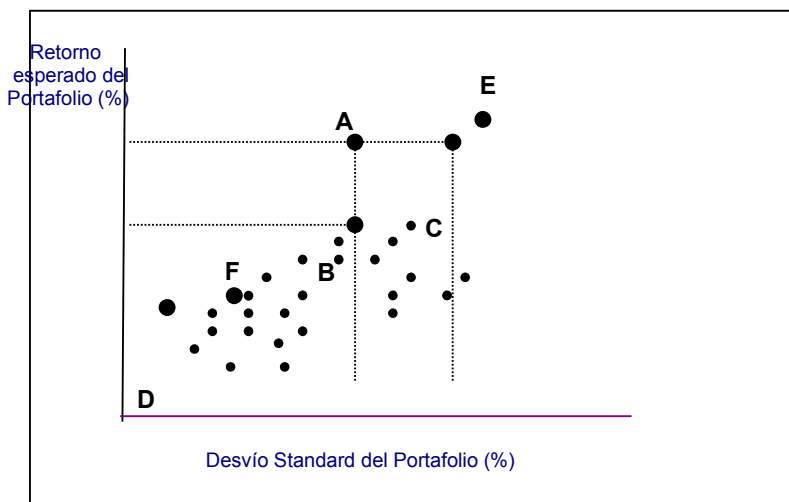
La Frontera eficiente, es la representación gráfica de un conjunto o grupo de carteras diversificadas eficientemente, esto debido a que las mismas ofrecen la tasa de rentabilidad esperada mayor para cada nivel de desviación de la cartera (riesgo). Teniendo esto en cuenta, la frontera eficiente es una herramienta útil para guiar a los inversionistas hacia la selección de una cartera o portafolio, que además de cumplir con sus gustos y preferencia, le permita maximizar rendimientos ante un nivel dado de riesgo, o minimizar riesgos para un rendimiento esperado.

Un portafolio que está conformado por valores dominantes se le conoce como portafolio eficiente. La frontera eficiente se forma graficando los puntos que ofrecen la mayor tasa de rendimiento esperado para un cierto nivel de riesgo.

Para su determinación se necesita primero determinar los activos financieros. En segundo lugar se necesita contar con los siguientes datos de dichos activos:

- Rendimiento esperado de cada uno de los activos
- Riesgo o desviación estándar esperada de cada uno de los activos
- Matriz de varianzas y covarianzas o matriz de correlaciones entre todos los activos

Si los portafolios se colocan en un gráfico donde el eje horizontal sea el riesgo o sea la desviación estándar del portafolio y el eje vertical sea el rendimiento del portafolio, ello nos daría una nube de puntos que relacionan los riesgos y retornos de los distintos portafolios.



Grafica No. 22. Relación retornos y volatilidad

Se puede apreciar en el gráfico que hay portafolios que tienen un mejor perfil de riesgo/retorno que otros, o dicho de otra manera, hay portafolios que *dominan* a otros. Por ejemplo el punto E es el que tiene más alto retorno, pero también tiene el mayor riesgo, por el contrario el punto D tiene el menor riesgo, pero también tiene el retorno más bajo. Existen otros puntos interesantes, por ejemplo A tiene casi el mismo retorno que E pero mucho menos riesgo, C está a la

misma altura que A es decir, igual retorno que A pero mayor riesgo, esto significa que entre C y A se elegiría A. Lo mismo pasa con B: entre A y B, es preferible A, por tener mayor rendimiento para un mismo riesgo; mientras que entre B y F, es preferible F por tener igual rendimiento pero menor riesgo. Por lo tanto, podemos convenir que nadie elegiría el portafolio B, pues es dominado por otros. Uniendo los puntos DFAE es lo que se conoce como **Frontera Eficiente**.

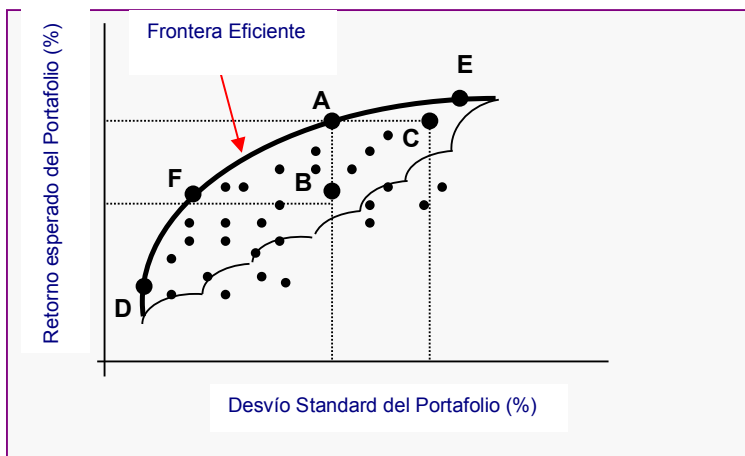


Grafico No. 23 Frontera eficiente de portafolio

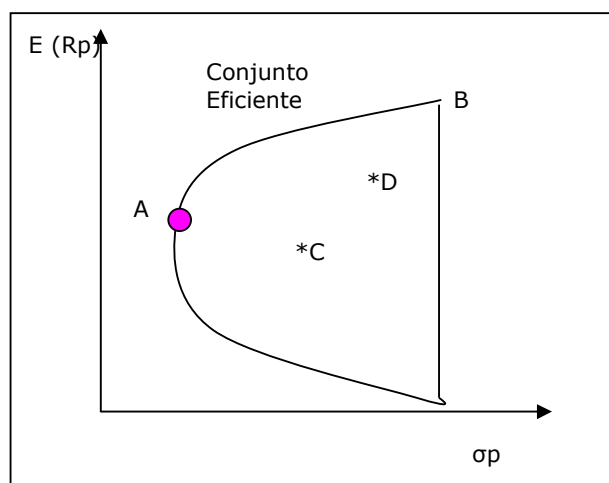
O dicho de otra manera, la frontera eficiente contiene los portafolios, compuestos por activos riesgosos que dominan a otros.

La mayor o menor concavidad de la curva dependerá de la correlación que exista entre los distintos activos. Si la correlación entre los activos es 1, la frontera eficiente será una línea recta entre D y E. A medida que la correlación disminuye se tornará más cóncava.

La selección de valores que forman un portafolio se hace en base a la relación riesgo-rendimiento, siguiendo dos reglas:

- Es preferido el valor de menor riesgo porque genera la misma tasa de rendimiento que otros.
- Es preferido el valor que tenga el rendimiento esperado más alto y que tenga el mismo grado de riesgo que otros. A estos valores se les conoce como *valores dominantes o conjunto factible*

El conjunto factible consiste en todos los posibles portafolios que pueden conformarse a partir de “n” títulos riesgosos. Este se representa gráficamente en el plano retorno esperado - desviación estándar. En el gráfico No 24 se muestra la forma que tendría el conjunto factible. En general, la gráfica del conjunto tendrá una forma similar a la de un “paraguas”



Grafica 24. Conjunto eficiente

Asumiendo que el inversionista es adverso al riesgo, siempre escogerá una combinación de títulos riesgosos tales que:

- a. Dado un nivel de riesgo determinado, ofrezca la rentabilidad máxima
- b. Dado un nivel de rentabilidad determinado, ofrezca un riesgo mínimo.

Tomando en cuenta ambos criterios se determina un *set* eficiente de portafolios que se encuentra delimitado por el segmento AB del gráfico No 24. El punto D del *set* factible no puede formar parte del conjunto eficiente, ya que para ese nivel de riesgo se puede adquirir un portafolio de mayor rentabilidad (F). Asimismo, el punto C tampoco puede estar dentro del conjunto eficiente; para dicha rentabilidad, puede conformarse un portafolio de menor riesgo (E).

Sin embargo, un inversionista no necesariamente escogerá cualquier portafolio del conjunto factible.

Algunos portafolios del conjunto serán mejores que otros. Así, un agente racional limitará sus posibilidades de elección a aquellos portafolios que sean los más eficientes del conjunto factible.

Concavidad del conjunto eficiente

Una propiedad que siempre debe cumplirse en el *set* eficiente es la concavidad. Esto puede demostrarse mediante un análisis, partiendo de una premisa falsa. Supongamos por un momento que el *set* factible posee tramos convexos, tal como el segmento PQ del gráfico 25. A partir de los portafolios establecidos en cada uno de estos dos puntos, podría generarse un tercer portafolio, Z, que sería una combinación lineal de P y Q. No obstante, se puede observar que el portafolio Z es superior al W, ubicado dentro del conjunto “eficiente”. Para una rentabilidad dada, el portafolio Z tiene una menor desviación estándar que W.

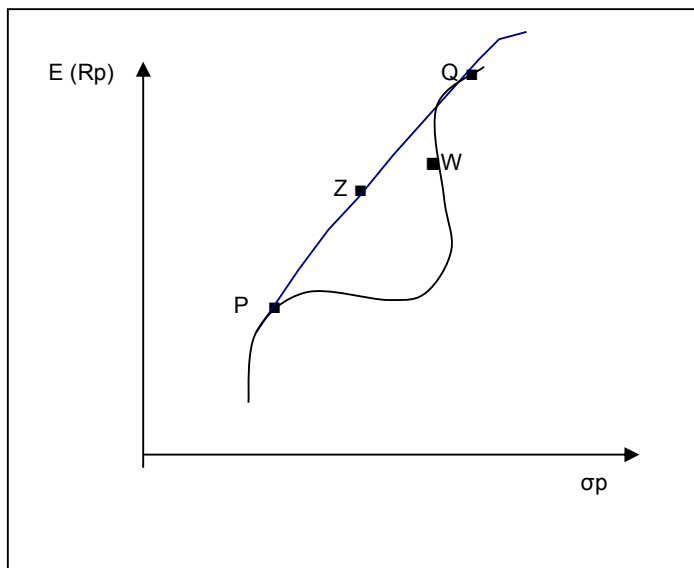


Grafico No. 25 - Concavidad del conjunto eficiente

3.1.1.9.1 Determinación del grupo factible.

Consideremos ahora las acciones de 10 empresas accionarias del Mercado de Valores Peruano, y todas las combinaciones posibles que el consumidor podría adquirir de ellas. Para poder desarrollar la metodología de Markowitz denotemos como: $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9$, y X_{10} , las proporciones de fondos que el inversionista estaría dispuesto a gastar en acciones de Minera Atacocha, Edelnor, Bakus & Johnston, Cementos Lima, Southern Perú, Telefónica del Perú, Luz del Sur, Corporación Arequipa, Cartavio S.A, Tután Agro Industria., tomando en cuenta que:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} = 1$$

De esta forma se tiene que si se decide invertir todo el dinero en acciones de la Minera Atacocha por ejemplo, entonces X_I será igual a 1 y la proporción invertida en las otras acciones será 0. Las combinaciones obtenidas se presentan en la tabla 6. En esta misma, se presenta el rendimiento esperado para los diferentes portafolios analizados y que fueron calculados mediante la fórmula siguiente:

$$\overline{R_p} = \sum_{i=1}^N x_i \overline{R_i}$$

Tabla No. 6. Rendimiento de portafolios: \overline{R}_i

MINA	TELP	B&J	CAA	EDEL	CAR	SOUP	LUZS	CEML	TUMA
1.038	0.586	0.435	1.027	0.208	1.724	1.035	0.142	0.028	0.182

Donde \bar{R}_p representa el rendimiento esperado de la cartera y \bar{R}_i el rendimiento medio de la acción, de tal forma que para el primer portafolio presentado en la tabla No. 7 se ha deducido de la siguiente manera:

$$R_p = (1/1.038*0) + (0.586*1) + (0.435*0) + (1.027*0) + (0.208*0) + (1.724*0) + (1.035*0) + (0.142*0) + (0.028*0) + (0.182*0) = 0.59$$

Tabla No. 7 Comportamiento de los portafolios de inversión analizados

[illegible]

Determinación de la desviación estándar:

Para calcular la desviación estándar de estos portafolios se utiliza la ecuación:

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \right]^{1/2}$$

Donde σ_{ij} denota la *covarianza* de los rendimientos entre los activos i y j .

Este proceso puede ser presentado para las acciones analizadas en este trabajo en la siguiente forma algebraica

$$\sigma_p = \left(\begin{aligned} &X_1 X_2 \sigma_{1,2} + X_1 X_3 \sigma_{1,3} + X_1 X_4 \sigma_{1,4} + X_1 X_5 \sigma_{1,5} + X_1 X_6 \sigma_{1,6} + X_1 X_7 \sigma_{1,7} + X_1 X_8 \sigma_{1,8} + X_1 X_9 \sigma_{1,9} \\ &+ X_1 X_{10} \sigma_{1,10} + X_2 X_3 \sigma_{2,3} + X_2 X_4 \sigma_{2,4} + X_2 X_5 \sigma_{2,5} + X_2 X_6 \sigma_{2,6} + X_2 X_7 \sigma_{2,7} + X_2 X_8 \sigma_{2,8} \\ &+ X_2 X_9 \sigma_{2,9} + X_2 X_{10} \sigma_{2,10} + X_3 X_4 \sigma_{3,4} + X_3 X_5 \sigma_{3,5} + X_3 X_6 \sigma_{3,6} + X_3 X_7 \sigma_{3,7} + X_3 X_8 \sigma_{3,8} \\ &+ X_3 X_9 \sigma_{3,9} + X_3 X_{10} \sigma_{3,10} + X_4 X_5 \sigma_{4,5} + X_4 X_6 \sigma_{4,6} + X_4 X_7 \sigma_{4,7} + X_4 X_8 \sigma_{4,8} + X_4 X_9 \sigma_{4,9} \\ &+ X_4 X_{10} \sigma_{4,10} + X_5 X_6 \sigma_{5,6} + X_5 X_7 \sigma_{5,7} + X_5 X_8 \sigma_{5,8} + X_5 X_9 \sigma_{5,9} + X_5 X_{10} \sigma_{5,10} + X_6 X_7 \sigma_{6,7} \\ &+ X_6 X_8 \sigma_{6,8} + X_6 X_9 \sigma_{6,9} + X_6 X_{10} \sigma_{6,10} + X_7 X_8 \sigma_{7,8} + X_7 X_9 \sigma_{7,9} + X_7 X_{10} \sigma_{7,10} + X_8 X_9 \sigma_{8,9} \\ &+ X_8 X_{10} \sigma_{8,10} + X_9 X_{10} \sigma_{9,10} \end{aligned} \right)^{1/2}$$

Para realizar este cálculo, es necesario utilizar una matriz varianza – covarianza, que es obtenida a través del uso de la ecuación de la doble sumatoria, la desviación estándar de cada uno de los activos puede ser calculada.

El grupo y la frontera eficiente tienen una importancia especial para los inversionistas. Todos ellos desean rendimientos esperados más altos y desean evitar el riesgo, querrán invertir en portafolios que pertenezcan al grupo eficiente. En otras palabras, desean portafolios que se encuentran sobre la frontera eficiente. Este deseo es obviamente razonable debido a que cualquier otro portafolio que el inversionista pudiera considerar estará dominado por uno que se encuentre sobre la frontera eficiente.

3.1.1.10 Determinación de la composición del portafolio T.

a) El conjunto eficiente en presencia de títulos libres de riesgo

Cuando existe la posibilidad de comprar títulos libre de riesgo, o pedir préstamos a tasas libres de riesgo, el conjunto eficiente cambia de forma. Si un inversionista hubiera escogido el portafolio A y existiera un título libre de riesgo con un retorno igual a R , entonces la recta $R - A$ indicaría todas las combinaciones posibles que podrían formarse entre el título libre de riesgo y el portafolio de títulos riesgosos. Sin embargo, estas combinaciones no son las óptimas. Si en lugar del portafolio A se escogiera el portafolio B, entonces las combinaciones de $R - B$, superarían a las de $R - A$ debido a que se podría obtener una mayor rentabilidad para cada nivel de riesgo. Es posible determinar una combinación de portafolios del *set* eficiente que podrían entrar en combinación con el título libre de riesgo, pero solamente existe un portafolio óptimo. En el gráfico No. 26, se puede apreciar que el portafolio óptimo (T) es aquel que maximiza la pendiente de la recta que une el punto asociado al título libre de riesgo y el *set* eficiente inicial.

La existencia de un solo portafolio óptimo determina el **Teorema de Separación**. Este teorema afirma que “la combinación óptima de títulos riesgosos para un inversionista puede ser determinada sin tener conocimiento alguno de las preferencias hacia el riesgo y rentabilidad del inversionista”.

De esta forma, el nuevo conjunto eficiente estaría dado por el rayo $R - T - H$. En el tramo $R - T$, el inversionista destina parte de sus recursos tanto al título libre de riesgo como al portafolio de valores riesgosos. En el tramo $T - H$, el inversionista, para adquirir mayor rentabilidad se endeuda a la tasa R_f e invierte un monto mayor a sus recursos iniciales en el portafolio T.

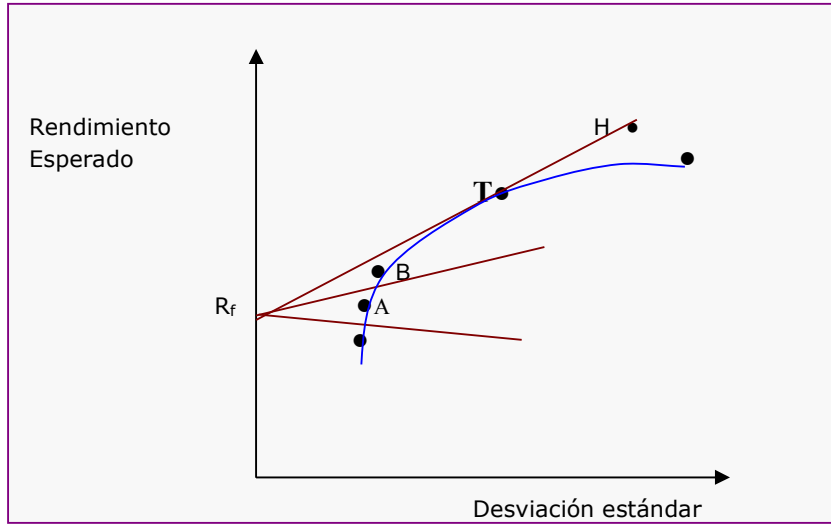


Grafico No. 26. Conjunto eficiente con activos libres de riesgo

Una vez establecida la **frontera eficiente y el rendimiento esperado** del portafolio se utiliza el algoritmo de **Elton, Gruber y Partman** para determinar la **composición de portafolio T**. Este algoritmo asume que el rendimiento de los activos puede ser analizado por el *modelo del mercado*, y que existe un activo libre de riesgo a una tasa R_f .

El algoritmo de Elton, Gruber y Partman (EGP)[16] se inicia calculando la pendiente de la línea que nace de R_f y se dirige hacia un portafolio específico denominado p , mediante la siguiente ecuación.

$$\theta = \frac{\overline{R_p} - R_f}{\sigma_p}$$

El algoritmo reconoce que el portafolio es aquel que presenta el máximo valor de θ y es tangente al portafolio T, así lo busca, hasta identificar el portafolio que maximiza el valor de θ mediante los siguientes pasos:

1. Se ordenan los activos en forma descendente en función de la magnitud de su “*recompensa – volatilidad*” que se calcula de la forma siguiente:

$$RVOL_i = (\overline{R_i} - R_f) / \beta_i$$

Donde: R_i = el rendimiento esperado del activo i

R_f = el rendimiento del activo libre de riesgo

B_i = cambio en la tasa de rendimiento esperado para el activo i asociado a un cambio del 1% en el rendimiento del mercado

El numerador representa la “recompensa” esperada por comprar el activo y el denominador la beta del activo. Esta tasa también se le conoce como tasa *Treynor*.

Ejemplo, del cálculo se muestra en la tabla No. 6, que se encuentra ordenada, como se ilustra:

$$RVOL_i = (R_i - R_f) / \beta_i = MINA (1.038 - 1.02) / 0.014 = 1.2857$$

$$RVOL = TELEP(0.586 - 1.02) / 0.112 = -3.875$$

2. Se debe ordenar los datos, para cada uno de los activos y se calculan los valores de Φ_i : Este valor representa el *punto de corte*.

Todos los activos que excedan este punto serán seleccionados como parte del portafolio T , y los que no lo hagan serán desechados.

$$\phi_i = \sigma_i^2 \frac{\sum_{i=1}^i \frac{\bar{R}_i - R_f}{\sigma_k^2} \beta_i}{1 + \sigma_i^2 \sum_{i=1}^i \frac{\beta_i^2}{\sigma_k^2}}$$

Donde:

σ_i^2 = varianza del índice del mercado

σ_k^2 = riesgo no sistemático (o varianza del movimiento de un activo que no está asociado a los movimientos del índice del mercado).

3. Se comparan los valores de Φ_i calculados con los valores correspondientes de $RVOL_i$ de la lista de activos **ordenados**. El valor inicial de Φ_i , será más pequeño, pero irá creciendo hasta convertirse en un valor mayor al de su correspondiente de $RVOL_i$. Luego, se puede decir que Φ_i es una tasa de corte para $RVOL_i$. La aplicación de este procedimiento se encuentra en la tabla No 7 (Pág. 98), de acuerdo a la muestra indicada:

$$\Phi_{CAA} = \frac{13.01 \left[\frac{(1.027-1.02)(0.0007)}{-1.97} \right]}{1 + 13.01 \frac{(0.0007^2)}{1.97}} = -0.0003$$

(Corporación Aceros Arequipa)

$$\Phi_{CAR} = \frac{13.01 \left[\frac{(1.027-1.02)(0.0007)}{-1.97} + \frac{(1.724-1.02)(0.161)}{-12.27} \right]}{1 + 13.01 \left[\frac{0.0007^2}{1.97} + \frac{0.161^2}{-12.27} \right]} = -0.124$$

(Cartavio SA)

b). Composición del portafolio T

Para poder determinar la composición de T se construye con los datos obtenidos en la sección anterior, la siguiente tabla:

Tabla No. 8. Resumen de coeficiente β

Empresa	Rendimiento Esperado (R_i)	Beta (β)	Riesgo no Sistemático (σ_k^2)
MINA	1.038	0.014	-1.074
TELEP	0.586	0.112	-0.544
B&J	0.435	0.023	-29.22
CAA	1.027	0.0007	-1.97
EDEL	0.208	0.001	-1.87
CAR	1.724	0.161	-12.27
SOUP	1.035	2.383	-3010.4
LUZS	0.142	0.0002	0.0011
CEML	0.028	0.117	-7.089
TUMA	0.182	0.223	-25.821

Además de los datos tabulados se ha considerado la varianza del Índice general de la bolsa de valores de Lima σ^2 es 0.1301 y que la tasa libre de riesgo es R_f es 0.0102.

Tabla No. 9.- Recompensa – volatilidad de 10 acciones

Nombre	Rendimiento Esperado	Beta	Riesgo no sistemático	RVOL _i
MINA	1.038	0.014	-1.074	1.29%
TELEP	0.586	0.112	-0.544	-3.87%
B&J	0.435	0.023	-29.22	-25.43%
CAA	1.027	0.0007	-1.97	10.0%
EDEL	0.208	0.001	-1.87	-0.81%
CAR	1.724	0.161	-12.27	4.37%
SOUP	1.035	2.383	-3010.4	0.006%
LUZS	0.142	0.0002	0.0011	-4.39%
CEML	0.028	0.117	-7.089	-8.47%
TUMA	0.182	0.223	-25.821	-3.76%

Tabla No. 10 – Calculo de Riesgo no sistemático en función RVOL

Nombre	Rendimiento Esperado	Beta	Riesgo no sistemático	RVOL _i
CAA	1.027	0.0007	-1.97	10.0%
CAR	1.724	0.161	-12.27	4.37%
MINA	1.083	0.014	-1.074	1.29%
SOUP	1.035	2.383	-3010.4	0.006%
EDEL	0.208	0.001	-1.87	-0.81%
TUMA	0.182	0.223	-25.821	-3.76%
TELEP	0.586	0.112	-0.544	-3.87%
LUZS	0.142	0.002	0.0011	-4.39%
CEML	0.028	0.117	-7.089	-8.47%
B&J	0.435	0.223	-29.22	-25.43%

El siguiente paso es determinar el valor de ϕ_i . Este valor va a representar el punto de corte de la tangente.

Tabla No. 11. Cálculo del punto (o tasa) de corte de la Tangente y su dispersión

Empresa	Rendimiento Esperado	Beta (β)	Riesgo no sistemático	RVOLi	ϕ_i	Diferencia RVOL- ϕ
CAA	1.027	0.0007	-1.97	10.0%	0.0003	9.99
CAR	1.724	0.161	-12.27	4.37%	-0.124	4.50
MINA	1.083	0.014	-1.074	1.29%	-0.137	1.43
SOUP	1.035	2.383	-3010.4	0.006%	-0.011	0.02
EDEL	0.208	0.001	-1.87	-0.81%	0.006	-0.82
TUMA	0.182	0.223	-25.821	-3.76%	0.102	-3.97
TELEP	0.586	0.112	-0.544	-3.87%	1.862	-5.73
LUZS	0.142	0.002	0.0011	-4.39%	-26.25	21.86
CEML	0.028	0.117	-7.089	-8.47%	-20.10	11.63
B&J	0.435	0.223	-29.22	-25.43%	0.285	-25.72

3.1.1.11 Utilidad y aversión al riesgo

Una forma alternativa a la propuesta por Markowitz para modelar el riesgo se basa en la toma de decisiones mediante la *función de utilidad esperada*. El problema de maximizar el rendimiento medio y minimizar la varianza es equivalente a maximizar la función esperada de la utilidad, cuando las variables aleatorias del beneficio de los valores se distribuyen normalmente y la función utilidad es exponencial.

Si ponemos en una gráfica todas las combinaciones de riesgo/rentabilidad que le son indiferentes, obtenemos una curva de indiferencia o curva de utilidad. A medida que el riesgo aumenta, también lo hará la rentabilidad deseada.

El inversor preferirá, entre todas las posibles curvas de utilidad definidas por su aversión al riesgo, aquella que le dé rentabilidad = infinito y riesgo = 0, pero se encuentra limitado por los activos existentes en el mercado, que en ningún caso

tienen dichas características. Por ello, se moverá por las curvas de utilidad próximas a los activos existentes.

La idea de aversión al riesgo está basada en la Teoría de la Utilidad, la que está referida a un conjunto de alternativas entre las que se define una relación de indiferencia y una relación de preferencia para un individuo que debe tomar una decisión. Mide el grado de satisfacción de un agente económico de acuerdo a distintos niveles de riesgo.

Por definición la Función de Utilidad, significa que a cada alternativa le corresponde un número llamado *utilidad de esa alternativa*, es decir, si una alternativa es preferida a otra, entonces la utilidad de la primera es mayor a la de la segunda.

$$U(A) > U(B)$$

Sobre la base de esta teoría el criterio óptimo de decisión es el de Maximizar la Utilidad Esperada, se entiende entonces que la utilidad esperada de una opción A que puede tener las n_i alternativas y cada una de ellas con probabilidad p_i , es:

$$E U(A) = \sum U(A_i) \cdot p_i$$

Si un inversor no toma la decisión de inversión oportuna de acuerdo al criterio máximo del valor esperado, esto se debe a su *aversión al riesgo*

La aversión al riesgo se refiere a la variabilidad de los resultados de algunas actividades inciertas. Una persona adversa al riesgo, prefiere obtener una renta segura a una renta cierta, cuyo valor esperado sea el mismo.

Estimación de la función de utilidad esperada y cálculo de portafolio óptimo

Sea $U(x)$ la función utilidad, la cual debe cumplir con las siguientes propiedades:

1. Si X_1 es referido a X_2 si y solo si $U(X_1) > U(X_2)$
2. Si X es aleatorio, se define a la utilidad de X como la esperanza matemática de $U(X)$, es decir $U(x) = E(u(X))$

En este caso “x” representa el rendimiento de un portafolio asociado a un mismo riesgo, la función va a ser estrictamente creciente. Esto nos dice que para todo “x”, $u'(x) > 0$, siendo $u'(x)$ la primera derivada de la función utilidad. Por otro lado, si más retorno implica más riesgo, la utilidad marginal de un adverso al riesgo irá decreciendo a medida que el rendimiento crece.

Por el contrario para una persona propenso al riesgo, la utilidad marginal será creciente.

Aquellos que son indiferentes al riesgo tendrán una utilidad marginal constante. En términos matemáticos se denotan

$u''(x) < 0$ implica aversión al riesgo

$u''(x) = 0$ implica indiferencia por el riesgo

$u''(x) > 0$ implica preferencia por el riesgo

Gráficamente:

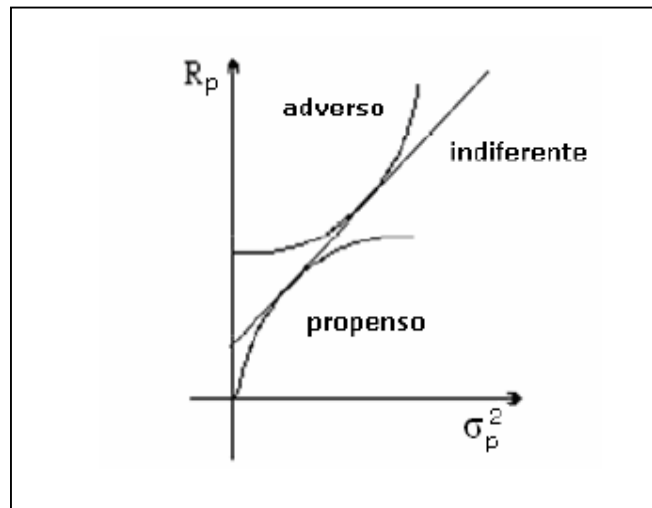


Gráfico No. 10. Comportamiento del inversor frente al riesgo

Cuando los agentes de inversión son prudentes se les considera adversos o indiferentes al riesgo, en tanto que los propensos al riesgo elegirán entre dos actividades con igual retorno a la más riesgosa, lo cual es más característico al jugador que prefiere más retorno, aunque ello implique más riesgo.

Por tanto se busca una función de utilidad $u(x)$ tal que:

$$u'(x) > 0 \quad (1)$$

$$u''(x) \leq 0 \quad (2)$$

Para determinar el grado de aversión al riesgo, utilizaremos el coeficiente de aversión al riesgo, es decir:

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Consideremos ahora que los agentes mantienen constante su grado de aversión al riesgo, es decir:

$$r(x) = c$$

Con lo que se podría establecer en relación a (1) y (2), se tendría a $c \geq 0$ o $c = 0$. De donde c , determinaría el grado de aversión o no al riesgo del inversionista, es así que mientras $c > 0$ es más grande el grado de aversión al riesgo, en tanto que si $c = 0$ las preferencias de un inversor expresarían su temor al riesgo, que es un componente que caracteriza a un jugador.

En resumen se podría establecer el siguiente cuadro:

Tipo de agente	Coeficiente de aversión	Portafolio óptimo
No adverso	C = 0	El de máximo retorno esperado
Adverso al riesgo	C > 0	El que maximiza
Totalmente adverso	C = + ∞	El de mínimo riesgo

3.2 Modelo de Mercado de Sharpe. (*Capital Asset Pricing Model* (CAPM))

3.2.1 Introducción

El CAPM es un modelo de equilibrio general, que se emplea para determinar la relación existente entre la rentabilidad y el riesgo de un portafolio de inversión, cuando el mercado de capitales se encuentra en equilibrio. El

modelo nos señala que todos los inversionistas en el mercado determinan el portafolio óptimo empleando el enfoque de Harry Markowitz.

Modelo según el cual, en un mercado eficiente el rendimiento esperado de cualquier activo o valor es proporcional a un riesgo sistemático. Cuanto mayor es dicho riesgo, definido por el *coeficiente beta*, mayor es la prima de riesgo exigida por las inversiones y mayor es, por lo tanto, su rendimiento.

La teoría implica que, por medio de la diversificación, se puede reducir la parte no sistemática del riesgo total de una cartera, mientras que el riesgo sistemático, determinado por el propio mercado, es imposible de reducir.

El modelo diagonal de Sharpe fue ideado para reducir el número de estimaciones a efectuar según el modelo de Markowitz. El llamado Modelo de Mercado de Sharpe es en realidad un modelo diagonal de un solo índice en su fase preliminar, esto es, cuando el modelo se utiliza para estimar los parámetros alfa y beta, junto con determinadas características de las variables que intervienen en dicho modelo, ésta se utiliza para contrastar la validez empírica del modelo de valoración de activos financieros o CAPM (Capital Asset Pricing Model). Según el CAPM, la acción no debería aportar riesgo «no sistemático», pues éste quedaría eliminado por la diversificación.

Asimismo, la teoría del CAPM dice lo siguiente:

- La rentabilidad debe ser proporcional al riesgo: a mayor rentabilidad, mayor riesgo, y viceversa.
- El riesgo total de una acción puede dividirse en sistemático y no sistemático. El riesgo sistemático es el que se debe a la bolsa: una acción sube porque sube toda la bolsa. De otro lado, tenemos el riesgo no sistemático que es la variación en el precio de la acción debida a causas exclusivas de la propia empresa. Sabemos que este riesgo se puede eliminar diversificando la cartera.
- El coeficiente que relaciona el riesgo de mercado con el riesgo sistemático de la acción, se denomina Beta.

- Se concluye que la prima de riesgo de una acción debe ser proporcional a su riesgo sistemático.

Finalmente, el CAPM implica que el rendimiento esperado de un activo puede estar relacionado linealmente con la covarianza de este rendimiento y con el rendimiento del portafolio de mercado.

3.2.2 Revisión del CAPM.

Markowitz [25] presentó su trabajo que sirvió de base para el CAPM. En esta investigación establece el problema de la selección de portafolio en términos del rendimiento esperado y la varianza del rendimiento. Argumentó que los inversionistas podrían optimizar la media – varianza de un portafolio eficiente, es decir, un portafolio con el más grande rendimiento esperado para un nivel dado de varianza. Sharpe[47] y Lintner [22] construyeron sobre el trabajo de Markowitz y desarrollaron sus amplias implicaciones económicas. Ellos establecieron que si los inversionistas tenían expectativas homogéneas y mantenían un portafolio eficiente óptimo, entonces el portafolio de mercado será por sí mismo un portafolio eficiente.

Este modelo se desarrolla a través de los siguientes supuestos acerca de los inversionistas y del conjunto de oportunidades de una cartera de inversión:

1. Los inversionistas son individuos que tienen aversión al riesgo y buscan Maximizar la utilidad esperada de su riqueza al final del periodo.
2. Los inversionistas poseen expectativas homogéneas acerca de los rendimientos de los activos, los cuales tienen una distribución normal conjunta.
3. Existe un activo libre de riesgo tal que los inversionistas pueden pedir en préstamo o prestar montos ilimitados a la tasa libre de riesgo. La tasa libre de riesgo es la misma para todos los inversionistas
4. Todas las inversiones tienen para su planificación, el mismo período, que puede ser un trimestre, un año, etc. El CAPM, al igual que el modelo de cartera, es un periódico.

5. Existe un mercado de capitales perfecto, lo cual implica:
 - 5.1 Todos los activos son perfectamente divisibles y comercializables.
 - 5.2 No hay costos de transacciones ni de información.
 - 5.3 No existen impuestos.
 - 5.4 Cada comprador o vendedor tiene efectos prácticamente insignificantes sobre el mercado.
 - 5.5 Existe una cantidad ilimitada de dinero para prestar o pedir prestada a una misma tasa de interés para los inversores.
 - 5.6 Existe una tasa libre de riesgo.
 - 5.7 No existe la inflación.

Estos supuestos muestran que el CAPM se basa en los postulados de la teoría microeconómica, según la que el consumidor (el inversionista con aversión al riesgo) elige entre curvas de indiferencia que le proporcionan la misma utilidad entre el riesgo y el rendimiento.

Esta conducta de los inversionistas hace que exista un conjunto de portafolios únicos que maximizan el rendimiento esperado de un activo y minimizan el riesgo; a esta serie de carteras se les denomina comúnmente portafolios eficientes.

La ecuación empleada por el CAPM es definida en forma directa de la eficiencia del portafolio de mercado. Las derivaciones de Sharpe y Lintner del CAPM asumen la existencia de prestar y pedir prestado a una tasa de interés libre de riesgo. Para esta versión de CAPM se tiene para el rendimiento esperado de un activo i ,

$$E[R_i] = R_f + \beta_{im}(E[R_m] - R_f) \quad (1)$$

$$\beta_{im} = \frac{Cov[R_i, R_m]}{Var[R_m]} \quad (2)$$

Donde R_m es el rendimiento del portafolio de mercado. La versión de Sharpe – Lintner puede ser expresada en forma más compacta en términos del rendimiento excedente sobre la tasa libre de riesgo o en términos *del rendimiento excedente*. Si Z representa el rendimiento del i -ésimo activo que presenta exceso sobre la tasa libre de riesgo, $Z_i \equiv R_i - R_f$. Entonces para CAPM de Sharpe – Lintner se tiene que:

$$E[Z_i] = \beta_{im} E[Z_m] \quad (3)$$

$$\beta_{im} = \frac{Cov[Z_i, Z_m]}{Var[Z_m]} \quad (4)$$

Donde Z_m es el rendimiento excedente sobre el portafolio del mercado de activos. Porque la tasa libre de riesgo es tratada como no estocástica, las ecuaciones 2 y 4 son equivalentes.

En implementaciones empíricas, se permite que el activo libre de riesgo sea estocástico y así las betas puedan diferir. La mayoría de los trabajos empíricos utilizan la versión de Sharpe– Lintner incluyendo el rendimiento excedente.

Pruebas empíricas del CAPM de Sharpe-Lintner se han enfocado en tres puntos: 1) La intercepción es cero, 2) Las betas capturan completamente la variación cruzada-seccional de los rendimientos esperados y 3) la prima del riesgo de mercado, $E[Z_m]$ es positiva.

4

En ausencia de un activo libre de riesgo, Black [3] dedujo una versión más general del CAPM. En esta versión, conocida como la versión de Black, el rendimiento esperado de un activo i en exceso sobre el rendimiento cero-beta se encuentra relacionado linealmente a su beta. Para el rendimiento esperado del activo i , $E[R_i]$, se tiene:

$$E[R_i] = E[R_{om}] + \beta_{im}(E[R_m] - E[R_{om}]) \quad (5)$$

R_m es el rendimiento del portafolio del mercado, y R_{om} es el rendimiento sobre el portafolio cero-beta asociado con m . Este portafolio está definido como el portafolio de varianza mínima de todos los portafolios no correlacionados con m . Cualesquiera otro portafolio no correlacionado tendría el mismo rendimiento esperado, pero una mayor varianza. Para el modelo de Black, los rendimientos generalmente se ajustan de acuerdo a la inflación y β_{im} se define sobre la base de rendimientos reales,

$$\beta_{im} = \frac{Cov[R_i, R_m]}{Var[R_m]} \quad (6)$$

3.2.3 Matemáticas del grupo eficiente.

Para iniciar el análisis matemático del CAPM, se definen N activos riesgosos con vector media $E(R)$ y matriz de covarianza (MCOV). Se Asume que el rendimiento esperado de al menos dos activos difiere y que la matriz de covarianza es para todo el intervalo. Se define ω_i como el vector ($N \times 1$) de las ponderaciones de un portafolio arbitrario i con varianza σ_p^2 . La covarianza entre dos portafolios a y b es $w_a m_{cov} w_b$. Dada la población de activos consideraremos el portafolio de varianza mínima en ausencia de un activo libre de riesgo.

Definición. El portafolio p es el portafolio de varianza mínima de todos los portafolios con rendimiento medio $E(R_p)$ si el vector ponderado del portafolio es la solución que optimiza las restricciones:

El punto de varianza mínima global

Para encontrar la combinación precisa de los n activos (el vector W) que produce el portafolio de varianza mínima global se plantea el siguiente problema de optimización restringida:

$$\text{Min} \frac{1}{2} \sigma_p^2$$

sujeto a :

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Este problema de optimización se resuelve mediante la técnica de *multiplicadores de Lagrange*:

La función Lagrangeana es:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n w_i w_k \sigma_{ik} + \lambda \left[1 - \sum_{i=1}^n w_i \right]$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange.

La condición de primer orden para obtener los puntos críticos consiste en derivar parcialmente respecto a los n ponderadores (w_i) y respecto al multiplicador de Lagrange, luego igualamos a cero y podemos despejar los n valores w y λ .

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = w_1 \sigma_{11} + w_2 \sigma_{12} + \dots + w_n \sigma_{1n} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = w_1 \sigma_{21} + w_2 \sigma_{22} + \dots + w_n \sigma_{2n} - \lambda = 0$$

.

.

.

$$\frac{\partial L}{\partial w_n} = w_1 \sigma_{n1} + w_2 \sigma_{n2} + \dots + w_n \sigma_{nn} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = w_1 + w_2 + \dots + w_n - 1 = 0$$

Representando la condición de primer orden como un sistema de $n + 1$ ecuaciones y el mismo número de incógnitas, el cual se expresa matricialmente como:

$$\mathbf{V1} \mathbf{W1} = \mathbf{B1} \quad (7)$$

Donde:

Pre multiplicando a ambos lados de (7) por la matriz inversa de V_1 , la cual debe ser una matriz no singular:

$$V_1^{-1} V_1 W_1 = V_1^{-1} B_1$$

De manera que el vector de incógnitas del problema de optimización es:

$$W_1 = V_1^{-1} B_1 \quad (8)$$

El vector W_1 que hemos encontrado corresponde a las ponderaciones que debe tener cada uno de los n activos en el portafolio que produce la varianza más baja de todos los portafolios que se pueden construir con esos activos, más el valor del multiplicador λ . Puesto que son datos del problema, las tasas esperadas de rendimiento de cada uno de esos activos, podemos conocer el rendimiento esperado del portafolio de varianza mínima aplicando (1)

$$E(R_p) = \bar{R}_p = \sum_{i=1}^n w_i \bar{R}_i$$

Donde $\bar{R}_i = E(R_i)$ es la tasa esperada de rendimiento del activo i , w_i es la ponderación que el activo i del portafolio (1ª) $R_p = W^T R_i$ donde ahora W^T es el transpuesto del vector de las ponderaciones y R_i es el vector de las tasas esperadas de rendimiento del portafolio.

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n w_i w_k \sigma_{ik}$$

y la varianza del mismo aplicando (4)

o (4ª). La cual puede expresarse mediante el álgebra de matrices como:

$$\sigma_p^2 = W^T S W$$

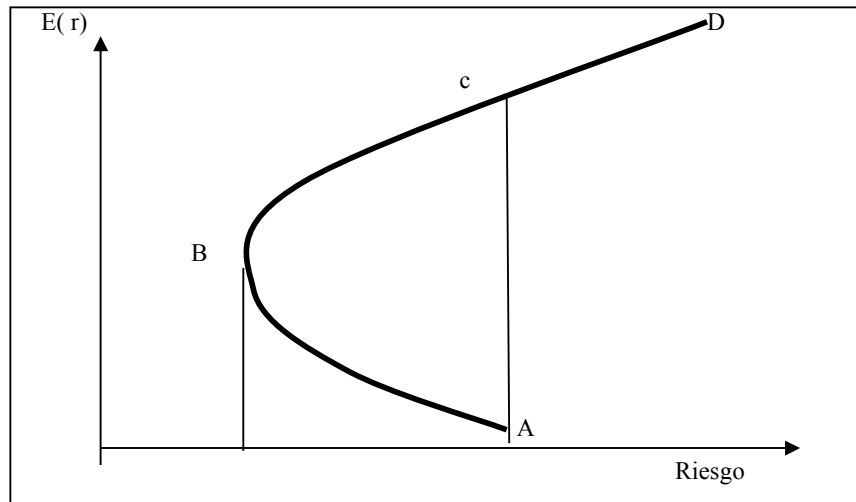
$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Siendo la matriz de varianzas y covarianzas de los rendimientos de los n activos y donde σ_{ik} es la covarianza de los rendimientos de los activos cuando $i \neq k$; cuando $i = k$ tenemos la covarianza del activo consigo mismo.

Así, ubicamos el punto B en el espacio-riesgo rendimiento. A la tasa esperada de rendimiento del portafolio de varianza mínima global, le llamamos R_{pm}

$$V1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad W1 = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \end{bmatrix} ; \quad B1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una vez que tenemos las coordenadas del punto de varianza mínima global, lo que tenemos es un problema de optimización muy similar al anterior, al que debemos agregar una restricción adicional. El problema consiste en encontrar las combinaciones de los n activos que producen varianza mínima para una tasa esperada de rendimiento dada, tal que ella sea superior a R_{pm} . Repitiendo este procedimiento para distintas tasas esperadas de rendimiento encontraremos los portafolios que dibujan la frontera eficiente, es decir el tramo de la curva BD de la gráfica 27.



Grafica 27.- Frontera eficiente para la Optimización

Formalmente, el problema de optimización restringida consiste ahora en lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Min } \frac{1}{2} \sigma_p^2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n w_i w_k \sigma_{ik} \\ \text{sujeto a : } \bar{R}_p &= \sum_{i=1}^n w_i \bar{R}_i \\ \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \end{aligned}$$

donde R_p es una tasa de rendimiento arbitrariamente escogida pero superior a \bar{R}_{pm}

Planteamos el Lagrangeano como:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n w_i w_k \sigma_{ik} + \lambda \left(\bar{R}_p - \sum_{i=1}^n w_i \bar{R}_i \right) + \gamma \left(1 - \sum_{i=1}^n w_i \right)$$

Las condiciones de primer orden para un mínimo son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w_1} &= w_1 \sigma_{11} + w_2 \sigma_{12} + \dots + w_3 \sigma_{13} - \lambda \bar{R}_1 - \gamma = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial w_2} &= w_1 \sigma_{21} + w_2 \sigma_{22} + \dots + w_3 \sigma_{23} - \lambda \bar{R}_2 - \gamma = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L}{\partial w_n} &= w_n \sigma_{n1} + w_2 \sigma_{n2} + \dots + w_3 \sigma_{n3} - \lambda \bar{R}_n - \gamma = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= w_1 \bar{R}_1 + w_2 \bar{R}_2 + \dots + w_n \bar{R}_n - \bar{R}_p = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \gamma} &= w_1 + w_2 + \dots + w_n - 1 = 0 \end{aligned}$$

La condición de primer orden es un sistema de $n + 2$ ecuaciones lineales con igual número de incógnitas: los n valores de w , y los dos multiplicadores λ y γ . Este sistema se puede expresar mediante el álgebra de matrices como sigue:

$$\mathbf{V2} \mathbf{W2} = \mathbf{B2} \quad (9)$$

Donde:

$$\mathbf{V2} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & R_1 & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} & R_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} & R_n & 1 \\ R_1 & R_2 & \dots & R_n & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{W2} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ \lambda \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \mathbf{B2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \overline{R_p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Premultiplicando ambos lados de (9) por la inversa de $\mathbf{V2}$ (que debe ser no singular), nos queda:

$$\mathbf{V2}^{-1} \mathbf{V2} \mathbf{W2} = \mathbf{V2}^{-1} \mathbf{B2}$$

De manera que el vector solución es:

$$\mathbf{W2} = \mathbf{V2}^{-1} \mathbf{B2} \quad (10)$$

La solución del sistema da, además de los dos multiplicadores de Lagrange, las proporciones que hay que invertir en cada uno de los n activos para obtener la tasa de rendimiento R_p , y que ese portafolio tenga la varianza mínima dentro de todos los portafolios que tienen esa tasa esperada de rendimiento. Si repetimos el procedimiento anterior para un conjunto de valores distintos de R_p que sean superiores, R_m podemos tener un número suficientemente grande de portafolios que forman parte de la frontera eficiente. Puesto que entre dos números siempre hay otro, el número de pruebas posibles es infinito; la cantidad de pruebas que se deban realizar dependerá del interés y objetivos del investigador.

3.2.4 La frontera eficiente.

En el mercado bursátil, los inversionistas, ante las diferentes opciones en el mercado, buscan altos rendimientos esperados y reducidos niveles de riesgo.

Los inversionistas racionales preferirán escoger carteras eficientes, es decir, aquellas sobre la frontera y no debajo de ella. El portafolio que un inversionista seleccione de la frontera eficiente, depende de su *grado de aversión al riesgo*. Un inversionista que sea muy adverso al riesgo escogerá uno en la parte inferior izquierda de la frontera, mientras que un inversionista que no tenga tanta aversión al riesgo escogerá uno en la parte superior de la frontera. Al mismo tiempo, se nota que el inversionista buscará como cartera óptima aquella que alcance la curva de indiferencia mas alta de las posibles, que será la cartera a la que se de las tangencias entre una de sus curvas de indiferencia y la frontera eficiente.

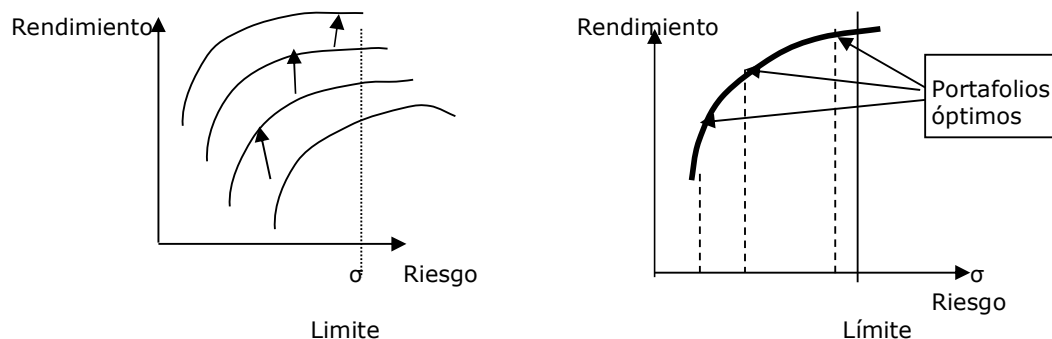


Gráfico No. 28 - Fronteras eficientes de CAPM

En la teoría del CAPM, existe una forma simple de determinar la relación entre el riesgo y el rendimiento de portafolios eficientes. La frontera eficiente del CAPM se conoce como **Línea del mercado de capitales (CML)**. Cualquier portafolio que involucre el portafolio de mercado y un activo libre de riesgo, deben caer debajo de la CML, aunque en algunos casos podría caer muy cerca de ella.

La pendiente de la curva CML es igual a la diferencia entre el rendimiento esperado del portafolio de mercado y el activo libre de riesgo dividido entre la diferencia de sus riesgos. Debido a que la ordenada al origen está dada por el activo libre de riesgo R_f , La ecuación que caracteriza al CML viene dada por:

$$\bar{R}_p = R_f + \left[\frac{\bar{R}_m - R_f}{\sigma_m} \right] \sigma_p$$

Donde \bar{R}_p y σ_p son el rendimiento esperado y la desviación estándar de un portafolio eficiente; \bar{R}_m y R_f rendimiento del portafolio del mercado y la tasa libre de riesgo respectivamente.

El equilibrio en el mercado de activos puede ser visto por **dos requisitos:** El primero es la ordenada al origen de la CML, representada por el activo libre de riesgo, el cual es conocido *como rendimiento por esperar*. El segundo es la pendiente que representa a su vez la recompensa por *unidad de riesgo tomado*.

Tobin llamó a la línea que va desde el punto de la tasa de rendimiento de los activos sin riesgos, hasta el punto de tangencia con la frontera eficiente, y luego más allá, la frontera súper eficiente o la Línea del mercado de capital (*Capital Market Line* (CML)).

Ejemplo: Si en la determinación del portafolio eficiente T del modelo de Markowitz, consideramos por ejemplo, la empresa accionaria Cartavio S.A que obtuvo un rendimiento esperado y su desviación estándar de 1.724% y 11.76% respectivamente, (Pág. 103) con una tasa libre de riesgo 1.02% , luego la ecuación resultante de la CML, se obtendrá :

$$\bar{R}_p = 1.020 + \left[\frac{(1.724 - 1.020)}{11.76} \right] \sigma_p = 1.020 + 0.0867 \sigma_p$$

3.2.5 La línea del mercado de capitales. (CML)

La línea del mercado de capitales (CML) de capitales representa las relaciones de equilibrio entre el rendimiento esperado y la desviación estándar para portafolios eficientes. Los riesgos para activos individuales se encontrarán siempre por debajo de esta línea ya que un activo riesgoso en forma individual será un activo ineficiente.

Dicho de otro modo, la CML presenta una serie de carteras que combinan una proporción de la cartera tangente, con una posición “larga” de los activos sin riesgo o con préstamos (posición “corta”) a la tasa de interés de los activos, sin riesgo para invertir más del 100% en la cartera tangente.

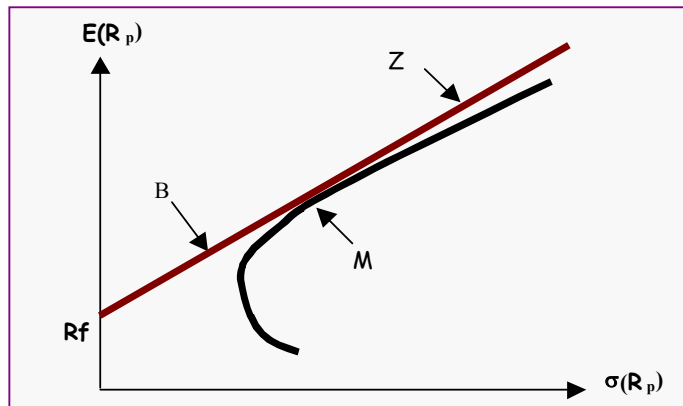
Las carteras a la izquierda de la cartera tangente tienen un riesgo menor al de las carteras en la frontera eficiente, pero rendimientos esperados ligeramente mayores.

La relación de equilibrio entre el riesgo y el rendimiento de un activo riesgoso viene dada por la siguiente fórmula:

$$\bar{R}_p = R_f + \left[\frac{\bar{R}_m - R_f}{\sigma_m} \right] \sigma_{im}$$

Como la pendiente es positiva, la ecuación indica que para estos activos al incrementarse su covarianza σ_{im} , más grande serán sus precios, y que al disminuir su covarianza su precio disminuye. Esta relación entre la covarianza y el rendimiento esperado de un activo se conoce como **La línea del Mercado de Activos (CML). Así tendremos:**

- La cartera de mercado tiene un $\beta = 1$, pues varía con ella misma.
- Las carteras con un $\beta > 1$ o $\beta < 1$ se denominan agresivas o defensivas, respectivamente e indica cómo se mueven sus retornos respecto al mercado.



Grafica No. 29: Línea de mercado de capitales

Los inversionistas elegirán una cartera dependiendo de su grado de aversión al riesgo. A la izquierda de M: se ubicarán los inversores que busquen menor riesgo y prestarán al tipo R_f (B). A la derecha de M: desean mayor rentabilidad y pedirán prestado al tipo R_f (Z). La línea recta $R_f - MZ$ se denomina *LÍNEA DEL MERCADO DE CAPITAL*. **Para nuestro estudio, consideramos los datos del ejemplo anterior, y adicionamos la σ_m^2 varianza del índice general de la Bolsa de Valores de Lima, (13.01%), luego se tiene:**

$$\bar{R}_p = R_f + \left[\frac{\bar{R}_m - R_f}{\sigma_m^2} \right] \sigma_{im}$$

$$\bar{R}_p = 1.020 + \frac{(1.724 - 1.020)}{13.01} \sigma_{im} = 1.020 + 0.05411 \sigma_{im}$$

De la misma forma, si tomamos en cuenta la versión β para la CML se representa por:

$$\begin{aligned} \bar{R}_i &= R_f + (\bar{R}_m - R_f) \beta_{im} = 1.020 + (1.724 - 1.020) \beta_{im} \\ \bar{R}_i &= 1.02 + 0.704 \beta_{im} \end{aligned}$$

3.2.6 Determinación del rendimiento del portafolio M

De acuerdo al CAPM, la relación entre el rendimiento esperado de los títulos y sus correspondientes Betas, está representada por una recta denominada Línea de Mercado de Valores o SML (Security Market Line), a lo largo de la cual se alinean en equilibrio los distintos portafolios.

Además, en el mercado existe un conjunto de carteras riesgosas que ponderadamente conforman la Cartera de Mercado, cuyo rendimiento esperado es $E(R_m)$, entonces se plantea que la diferencia entre el rendimiento esperado del mercado $E(R_m)$, y la tasa libre de riesgo R_f , corresponde a la prima por riesgo que se paga en este mercado por aceptar el riesgo promedio o sistemático.

Por lo tanto, la SML puede ser descrita en el espacio $[E(R), \beta]$ por dos parámetros: Su intercepto con el eje de ordenadas (R_f) y su pendiente (prima por riesgo).

La pendiente de la SML es equivalente a: $[E(R_m) - R_f] \cdot \beta_i$. Bajo este modelo, la cartera se forma con dos tipos de activo:

1. Un activo sin riesgo (R_f)
2. Un activo con riesgo, que es una cartera con títulos específicos, con una Rentabilidad $E(R_x)$

Como por definición R_m es igual a 1, la pendiente de la SML queda determinada por el exceso de retorno pagado por la cartera de mercado con respecto a la tasa que rinde el título sin riesgo. Por lo tanto la función de la SML está dada por:

$$E_i = R_f + (R_m - R_f)\beta_i$$

Donde:

$$(R_m - R_f)\beta_i = \text{prima por aceptar el riesgo}$$

Esta relación nos indica que el rendimiento esperado de cualquier activo depende de dos componentes:

1. Un retorno básico que se obtendría al invertir sin riesgo, lo que está medido por R_f .
2. Una prima que paga el mercado por invertir en el activo riesgoso, lo que depende de cómo el mercado premia al riesgo promedio multiplicado por el riesgo sistemático que tiene el activo i $[E(R_m) - R_f] \cdot \beta_i$.

Por ejemplo: En el mercado, por una inversión sin riesgo se obtiene un 8%, y en promedio las inversiones riesgosas rentan un 13%, entonces el premio por riesgo del mercado, será:

$$[E(R_m) - R_f] = [0.13 - 0.08] = 0.05$$

Si nos interesa saber cuánto exigirle como retorno dentro de este mercado a una inversión A, cuyo β_1 es 1.2, al aplicar la relación CAPM se tiene:

$$E(R_i) = R_f + [E(R_m) - R_f] * \beta_i$$

$$E(R_a) = 0.08 + (0.13 - 0.08) * 1.2 = 0.14$$

Por lo tanto, el título A promete un retorno de un 14%, superando en un 1 % al retorno promedio del mercado, ya que obliga al inversionista a asumir un riesgo sistemático mayor, lo que está cuantificado por su mayor Beta, lo que indica que es un título más volátil que el promedio. Esta conclusión se observa en el gráfico N° 30.

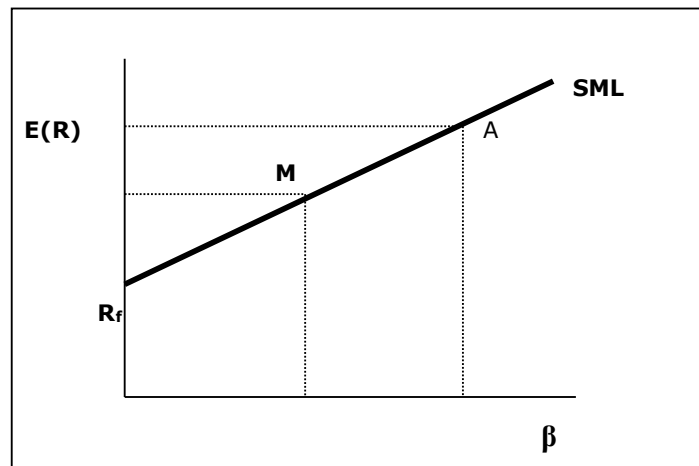


Gráfico No. 30 Rendimiento de portafolio M en la línea de mercado de valores.

Aunque la situación más común a la que se enfrentan los inversores en el mercado es aquella en la que el *coeficiente de correlación* entre los títulos toma valores intermedios entre -1 y 1 . Cuando esto ocurre, la desviación típica de las distintas carteras es menor que la media ponderada de las desviaciones típicas de los activos que la componen. Cuanto más bajo sea el coeficiente de correlaciones mayores son los beneficios que ofrece la diversificación en términos de reducción del riesgo sin disminuir el rendimiento.

En un mercado en que no existe un *activo libre de riesgo*, el individuo toma su decisión a través de un ejercicio de optimización, cuya solución vendría dada por la tangencia entre la curva de indiferencia del individuo y la frontera de combinaciones posibles y eficientes.

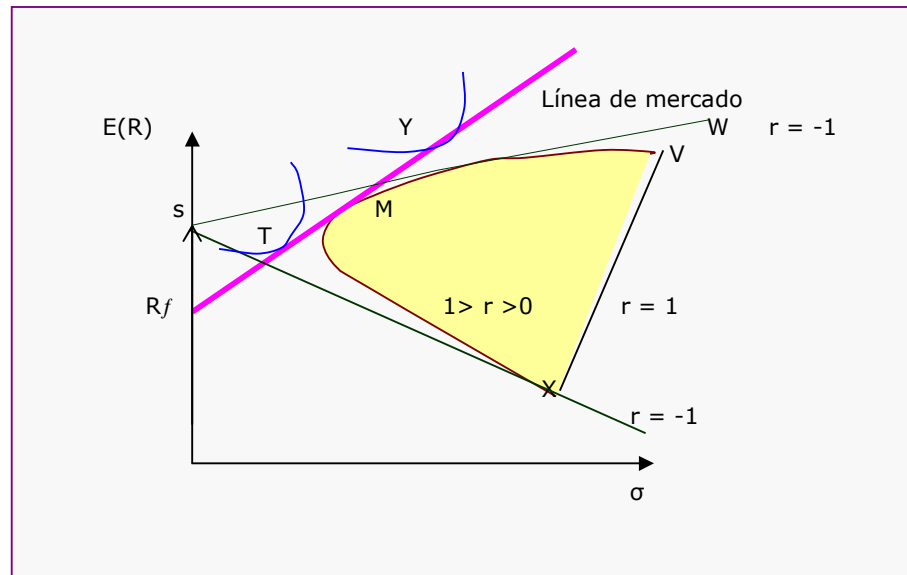


Grafico No. 31- Equilibrio en el modelo de Media-Varianza

Nota: La frontera eficiente (o Paraguas de Markowitz) viene dada por la curva VMX. Si $0 < r < 1$; WSX; si $r = -1$; XV, si $r = 1$. Los puntos X y V representan el menor y mayor riesgo y el menor y mayor rendimiento, respectivamente. T e Y representan soluciones óptimas de acuerdo al perfil del individuo. Y representa una situación de "ventas cortas"

CAPITULO IV

HERRAMIENTAS DE INVESTIGACIONES DE OPERACIONES PARA LA OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS DE INVERSION:

4.1 Introducción.

El principal objetivo de la teoría de la cartera es optimizar la asignación de distintos activos en una inversión. La Optimización *Media-Varianza*, es una herramienta cuantitativa que permite realizar esta asignación, considerando el intercambio entre la rentabilidad y el riesgo. Esto se realiza mediante la determinación de la frontera eficiente, es decir, el conjunto de combinaciones de activos que minimizan el riesgo que se debe asumir para un nivel determinado de rentabilidad esperada. Para hallar la frontera eficiente, se propone un problema de programación matemática no lineal, específicamente un problema de programación cuadrática (en el caso que se desea minimizar el riesgo para una ganancia determinada).

Para aplicar esta técnica se debe cumplir las siguientes condiciones:

- Ganancias esperadas y varianzas finitas, todos los activos no tienen la misma ganancia esperada y
- La matriz de covarianzas entre los activos debe ser definida positiva

4.2 Programación cuadrática

La programación cuadrática considera el problema de optimizar una función objetivo cuadrática sujeta a restricciones lineales y a condiciones de no negatividad. Un modelo de programación cuadrática se define como:

$$\begin{aligned} &\text{Optimizar } f(x) = C^T X - 1/2 X^T Q X \\ &\text{sujeto a : } AX \leq b \\ &X \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donde: } C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mn} \end{bmatrix}$$

Donde $X \in E^*$, c es un vector de coeficientes de variables de n componentes, la matriz Q es una matriz simétrica definida positiva (negativa), si el problema es de minimización (maximización), es decir, $X^t \cdot Q \cdot X > 0$ para todo $X \in E^*$, excepto $X=0$ (minimización), b es un vector de disponibilidad de recursos.

A es una matriz $m \times n$ de coeficientes y 0 es un vector de n ceros. Como se observa, el problema de optimización tiene restricciones lineales lo cual garantiza un espacio de soluciones convexas. Si Q es una matriz nula, se convierte en un problema de programación lineal, como Q es definida positiva, esto implica que $f(X)$ es una función estrictamente convexa y por lo tanto el mínimo si existe, es global. (Condición necesaria de KKT – Karush-Kuhn-Tucker) [19]. Si Q es definida negativa es estrictamente cóncava y el máximo, si existe, es global.

Siguiendo esta línea de trabajo, a continuación se presenta el modelo de programación cuadrática en función de las características de los activos analizados: activo aleatorio o riesgoso y activo libre de riesgo, empleando para este propósito el *teorema de la separación* (“la combinación de activos riesgosos y libres de riesgo para un inversionista cualquiera, puede determinarse sin conocimiento alguno de los gustos y preferencia en que puede producirse el riesgo y rendimiento del inversionista”). Para ello, se incluye el método analítico y matricial. ORELLANA O. [53]. PAREDES [33].

1. Problema de Optimización (operando solo con activos aleatorios)

a) Presentación literal:

Función Objetivo:

Minimizar el riesgo de la cartera.

Restricciones:

Obtener un determinado rendimiento esperado de la cartera.

La totalidad del capital disponible debe invertirse en los distintos activos que forman parte de la cartera (no existen prohibiciones para realizar ventas en descubierto).

Variables de decisión:

Las proporciones del capital a invertir en cada uno de los activos de la cartera.

b) Formalización del problema de optimización con activos riesgosos:

Nomenclatura utilizada:

X_i : Proporción a invertir en el Activo “i”

E_i : Rendimiento esperado del Activo “i”.

σ_i^2 : Varianza del Activo “i”.

$\sigma_{i,j}$: Covarianza entre el Activo “i” y el Activo “j”, siendo $i \neq j$.

E_p : Esperanza o rendimiento promedio de la cartera.

σ_p^2 : Varianza del rendimiento de la cartera.

$\overline{E_p}$: Rendimiento esperado exigido a la cartera.

X: Vector Columna de los X_i .

**I. Obtención de la cartera optima para “k” activos aleatorios
(Optimización restringida)**

Función Objetivo: Minimizar Riesgo

$$\text{Min. } \sigma_p^2 = \text{Min. } F(X_1; X_2; \dots; X_K) =$$

$$= X_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \dots + X_K^2 \cdot \sigma_K^2 + 2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot \sigma_{1,2} + 2 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot \sigma_{1,3} + \dots + 2 \cdot X_{K-1} \cdot X_K \cdot \sigma_{K-1,K}$$

$$F(X_1; X_2; \dots; X_K) = X_1^2 \cdot \sigma_1^2 + X_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + X_K^2 \cdot \sigma_K^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i+1}^K X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j}$$

$$F(X_1; X_2; \dots; X_K) = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,K} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{K,1} & \sigma_{K,2} & \dots & \sigma_K^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_K \end{bmatrix}$$

Restricciones: (q = 2)

$$\overline{E_p} = X_1 \cdot E_1 + X_2 \cdot E_2 + \dots + X_K \cdot E_K$$

$$1 = X_1 + X_2 + \dots + X_K$$

(Optimización libre)

$$\text{Min. } L = F(X_1; \dots; X_K) - \lambda_1 \cdot (\overline{E_p} - X_1 \cdot E_1 - \dots - X_K \cdot E_K) - \lambda_2 \cdot (1 - X_1 - \dots - X_K)$$

$$\begin{aligned} \text{Min. } L = & X_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \dots + X_K^2 \cdot \sigma_K^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i+1}^K X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j} \\ & - \lambda_1 \cdot (\overline{E_p} - \sum_{i=1}^K X_i \cdot E_i) - \lambda_2 \cdot (1 - \sum_{i=1}^K X_i) \end{aligned}$$

Minimización de la función $L = f(X_1; \dots; X_K; \lambda_1; \lambda_2)$

Condición de Primer Orden: derivar la función objetivo $L(X_1; \dots; X_K; \lambda_1; \lambda_2)$ con respecto a cada una de las variables de las cuales depende la función y se iguala a cero.

Condición de Segundo Orden:

(Criterio de los determinantes para extremos relativos restringidos)

Siendo: q: Cantidad de restricciones de igualdad (para el caso analizado q=2)

$\left| \overline{H}_{q+h} \right|$: Menor principal formado de dimensiones (q+h) x (q+h), comenzado de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha (para h=1, 2, 3, ..., K)

La condición suficiente para la minimización de la función objetivo con

restricciones: todos los menores principales $\left| \overline{H}_{q+h} \right|$ deben tomar el signo de $(-1)^q$

Con base a los pasos iniciales (cálculo del rendimiento esperado, Varianza – Covarianza y Coeficiente de Correlación Lineal, se deberá aplicar tres `pasos para la construcción de frontera eficiente.

II Obtención de la Frontera Eficiente Operando con activos aleatorios únicamente. El procedimiento consiste de los siguientes pasos:

PASO 1.- Se determina la composición de la cartera, que minimice el riesgo de la misma, sujeta a la siguiente restricción:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_K = 1$$

(Optimización restringida)

Objetivo: $\text{Min. } F(X_1; X_2; \dots; X_K) =$

$$X_1^2 \cdot \sigma_1^2 + X_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + X_K^2 \cdot \sigma_K^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i+1}^K X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j}$$

Restricción: $1 = X_1 + X_2 + \dots + X_K$

(Optimización libre)

$$\text{Min. } L = F(X_1; X_2; \dots; X_K) - \lambda_2 \cdot (1 - X_1 - X_2 - \dots - X_K)$$

$$\text{Min. } L = X_1^2 \cdot \sigma_1^2 + X_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + X_K^2 \cdot \sigma_K^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i+1}^K X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j} - \lambda_2 \cdot (1 - \sum_{i=1}^K X_i)$$

Minimización de la función $L = f(X_A; X_B; \lambda_2)$

Obtención de la combinación óptima a través de la resolución mediante el método matricial

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,K} & 1 \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,K} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{K,1} & \sigma_{K,2} & \dots & \sigma_K^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_K \\ \lambda_2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_K \\ \lambda_2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,K} & 1 \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,K} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{K,1} & \sigma_{K,2} & \dots & \sigma_K^2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \overline{E_p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} \\ X_2^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} \\ \dots \\ X_K^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} \\ \lambda_2^{Min.\sigma_{CARTERA}^2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{proporción óptima a adquirir del activo 1} \\ \text{proporción óptima a adquirir del activo 2} \\ \dots \\ \text{proporción óptima a adquirir del activo K} \\ \text{valor del multiplicador dos/2} \end{bmatrix}$$

PASO 2.- Una vez obtenidos los $X_i^{Min.\sigma_{CARTERA}^2}$, se obtiene el rendimiento esperado de la cartera para dichos valores.

$$\overline{E_p}^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} = X_1^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} \cdot E_1 + X_2^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} \cdot E_2 + \dots + X_K^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} \cdot E_K$$

$$Min.\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} X_1^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} & X_2^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} & \dots & X_K^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,K} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{K,1} & \sigma_{K,2} & \dots & \sigma_K^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} \\ X_2^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} \\ \dots \\ X_K^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} \end{bmatrix}$$

$$\overline{E_p}^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} = X_1^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} \cdot E_1 + X_2^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} \cdot E_2 + \dots + X_K^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} \cdot E_K$$

$$\overline{E_p}^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} = \begin{bmatrix} X_1^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} & X_2^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} & \dots & X_K^{Min.\sigma_{CARTERA}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_K \end{bmatrix}$$

PASO 3.- Una vez obtenido el valor del rendimiento esperado $\overline{E_p}^{Min.\sigma_{CARTERA}^2}$ de la cartera óptima para el que se tiene el mínimo riesgo, se vuelve a minimizar el riesgo de la cartera, pero sujeta a las siguientes restricciones:

$$\overline{E_p} = X_1 \cdot E_1 + X_2 \cdot E_2 + \dots + X_K \cdot E_K \quad \text{para valores de } \overline{E_p} \geq \overline{E_p}^{Min.\sigma_{CARTERA}^2}$$

$$X_1 + X_2 + \dots + X_K = 1$$

(Optimización restringida)

Objetivo: **Minimizar Riesgo** = Min. $F(X_1; X_2; \dots; X_K)$

Min. $F(X_1; X_2; \dots; X_K) =$

$$= X_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \dots + X_K^2 \cdot \sigma_K^2 + 2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot \sigma_{1,2} + 2 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot \sigma_{1,3} + \dots + 2 \cdot X_{K-1} \cdot X_K \cdot \sigma_{K-1,K}$$

$$F(X_1; X_2; \dots; X_K) = X_1^2 \cdot \sigma_1^2 + X_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + X_K^2 \cdot \sigma_K^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i}^K X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j}$$

Restricciones:

$$\overline{E_p} = X_1 \cdot E_1 + X_2 \cdot E_2 + \dots + X_K \cdot E_K \quad \text{para valores de } \overline{E_p} \geq \overline{E_p}^{\text{Min. } \sigma_{\text{CARTERA}}^2}$$

$$1 = X_1 + X_2 + \dots + X_K$$

(Optimización libre)

Objetivo: Min. $L = f(X_1; X_2; \dots; X_K; \lambda_1; \lambda_2)$

$$L = F(X_1; X_2; \dots; X_K) - \lambda_1 \cdot (\overline{E_p} - X_1 \cdot E_1 - X_2 \cdot E_2 - \dots - X_K \cdot E_K) - \lambda_2 \cdot (1 - X_1 - X_2 - \dots - X_K)$$

$$\text{Min. } L = X_1^2 \cdot \sigma_1^2 + X_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \dots + X_K^2 \cdot \sigma_K^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i}^K X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j}$$

$$- \lambda_1 \cdot (\overline{E_p} - \sum_{i=1}^K X_i \cdot E_i) - \lambda_2 \cdot (1 - \sum_{i=1}^K X_i)$$

Obtención de la combinación óptima a través de la resolución mediante el Método Matricial:

SISTEMA DE ECUACIONES EN FORMA MATRICIAL (condición de primer orden):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,K} & E_1 & 1 \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,K} & E_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{K,1} & \sigma_{K,2} & \dots & \sigma_K^2 & E_K & 1 \\ E_1 & E_2 & \dots & E_K & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_K \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \overline{E_p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

RESOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES EN FORMA MATRICIAL:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_K \\ \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,K} & E_1 & 1 \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,K} & E_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{K,1} & \sigma_{K,2} & \dots & \sigma_K^2 & E_K & 1 \\ E_1 & E_2 & \dots & E_K & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \overline{E_p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES:

$$\begin{bmatrix} X_1^{\text{CarteraEficiente}} \\ X_2^{\text{CarteraEficiente}} \\ \dots \\ X_K^{\text{CarteraEficiente}} \\ \lambda_1^{\text{CarteraEficiente}} / 2 \\ \lambda_2^{\text{CarteraEficiente}} / 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{proporción óptima a adquirir del activo 1} \\ \text{proporción óptima a adquirir del activo 2} \\ \dots \\ \text{proporción óptima a adquirir del activo K} \\ \text{valor del multiplicador uno/2} \\ \text{valor del multiplicador dos/2} \end{bmatrix}$$

Para los distintos rendimientos esperados requeridos a la cartera se obtendrá un riesgo asociado a la misma, lo que permitirá construir la FRONTERA EFICIENTE “A” para los activos aleatorios analizados.

2. Problema de Optimización combinando activos aleatorios y un activo libre de riesgo

Objetivo:

Minimizar el riesgo de la cartera que combina el activo libre de riesgo con una cartera eficiente conformada únicamente por activos aleatorios.

Restricciones:

Obtener un determinado rendimiento esperado de la cartera combinada.

El total del capital disponible debe destinarse a la adquisición de la cartera eficiente y/o el activo libre de riesgo.

La proporción del capital total destinada a la cartera aleatoria debe invertirse completamente entre los activos que componen dicha cartera (no existen prohibiciones para realizar ventas en descubierto).

Variables de Decisión:

Las proporciones del capital a invertir en el activo libre de riesgo y la cartera eficiente formadas por activos aleatorios y la composición interna de dicha cartera.

Formalización del problema de optimización con activos aleatorios combinados con un activo libre de riesgo:

Nomenclatura utilizada:

X_i : Proporción a invertir en el Activo “i”.

Y_L : Proporción a invertir en el Activo Libre de Riesgo.

Y_P : Proporción a invertir en Cartera Eficiente formada por activos aleatorios.

E_i : Rendimiento esperado del Activo “i”.

σ_i^2 : Varianza del Activo “i”.

$\sigma_{i,j}$: Covarianza entre el Activo “i” y el Activo “j”, siendo $i \neq j$.

$\sigma_{L,P}$: Covarianza entre el Activo Libre de Riesgo y la Cartera Eficiente.

E_p : Esperanza o rendimiento promedio de la cartera formada por activos aleatorios.

R_L : Rendimiento libre de riesgo.

σ_p^2 : Varianza del rendimiento de la cartera formada por activos aleatorios.

σ_C^2 : Varianza del rendimiento de la cartera combinada formada por una cartera eficiente y el activo libre de riesgo.

σ_L^2 : Varianza del rendimiento de la cartera por el activo libre de riesgo

$\overline{E_p}$: Rendimiento esperado exigido a la cartera formada por activos aleatorios.

$\overline{E_C}$: Rendimiento esperado exigido a la cartera combinada.

$\rho_{L,P}$: Coeficiente de Correlación Lineal entre el Activo Libre de Riesgo y la cartera eficiente formada por activos aleatorios.

$\rho_{i,j}$: Coeficiente de Correlación Lineal entre el rendimiento del activo “j” y el rendimiento del activo “i”.

Riesgo de la cartera combinada:

$$\begin{aligned}\sigma_C^2 &= (1 - Y_P)^2 \cdot \sigma_L^2 + Y_P^2 \cdot \sigma_P^2 + 2 \cdot Y_L \cdot Y_P \cdot \sigma_{L,P} \\ \sigma_C^2 &= (1 - Y_P)^2 \cdot \sigma_L^2 + Y_P^2 \cdot \sigma_P^2 + 2 \cdot Y_L \cdot Y_P \cdot \rho_{L,P} \cdot \sigma_L \cdot \sigma_P\end{aligned}$$

Por ser el Rendimiento del activo libre de riesgo constante, su desvío y su varianza son nulos, entonces:

$$\begin{aligned}\sigma_C^2 &= Y_P^2 \cdot \sigma_P^2 & \sigma_C &= Y_P \cdot \sigma_P \\ Y_P &= \frac{\sigma_C}{\sigma_P}\end{aligned}$$

Rendimiento esperado de la cartera combinada:

$$\begin{aligned}\overline{E_C} &= (1 - Y_p)R_L + Y_p \cdot \overline{E_p} & \overline{E_C} &= \left(1 - \frac{\sigma_C}{\sigma_p}\right)R_L + \frac{\sigma_C}{\sigma_p} \cdot \overline{E_p} \\ \overline{E_C} &= R_L + \left(-\frac{\sigma_C}{\sigma_p}\right)R_L + \frac{\sigma_C}{\sigma_p} \cdot \overline{E_p} & \overline{E_C} &= (\overline{E_p} - R_L) \cdot \frac{\sigma_C}{\sigma_p} + R_L \\ \overline{E_C} &= \left(\frac{\overline{E_p} - R_L}{\sigma_p}\right) \cdot \sigma_C + R_L\end{aligned}$$

Como puede apreciarse el rendimiento esperado de la cartera combinada es una función lineal del riesgo (desvío) de la cartera combinada, siendo:

R_L : ordenada al origen.

$\left(\frac{\overline{E_p} - R_L}{\sigma_p}\right)$: Pendiente de la función lineal.

La **pendiente** de la función Rendimiento Esperado de la cartera combinada no asume un único valor, el mismo depende de la cartera eficiente con la cual se combine el activo libre de riesgo, por lo tanto la pendiente depende de manera indirecta de las proporciones a invertir en los activos aleatorios que conforman una cartera eficiente, es decir:

$$m = \left(\frac{\overline{E_p} - R_L}{\sigma_p}\right) = \frac{\sum_{i=1}^K X_i \cdot E_i - R_L}{\left(\sum_{i=1}^K X_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i}^K X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j}\right)^{1/2}}$$

De acuerdo con el *Criterio de la Media - Varianza* un inversor racional preferirá, para un determinado riesgo, obtener el máximo rendimiento esperado. De esta manera deberá aplicarse los siguientes pasos para la construcción de la nueva frontera eficiente (Línea de mercado de capitales CML)

I. Maximización de la pendiente de la función rendimiento esperado de la cartera combinada

PASO 1.- Obtención de la cartera eficiente para “k” activos aleatorios que maximizan la pendiente “m”.

(Optimización restringida)

$$\text{Objetivo: Máx. } m = \left(\frac{\overline{E_p} - R_L}{\sigma_p} \right) = \frac{\sum_{i=1}^K X_i \cdot E_i - 1 \cdot R_L}{\left(\sum_{i=1}^K X_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i}^K X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j} \right)^{1/2}}$$

Restricción:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_K = 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^K X_i = 1$$

(Optimización libre)

$$\text{Máx. } m = \left(\frac{\overline{E_p} - R_L}{\sigma_p} \right) = \frac{\sum_{i=1}^K X_i \cdot (E_i - R_L)}{\left(\sum_{i=1}^K X_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i}^K X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j} \right)^{1/2}} = g(X_1, X_2, \dots, X_K)$$

Condición de Primer Orden:

$$\frac{\partial m}{\partial X_1} = 0 \quad \frac{\partial m}{\partial X_2} = 0 \quad \frac{\partial m}{\partial X_K} = 0$$

Operando algebraicamente sobre el sistema de ecuaciones obtenido con la condición de primer orden se generan las siguientes transformaciones:

$$Z_i = \frac{(\overline{E_p} - R_L)}{\sigma_p^2} \cdot X_i$$

$$\sum_{i=1}^K Z_i = \sum_{i=1}^K \frac{(\overline{E_p} - R_L)}{\sigma_p^2} \cdot X_i \quad \sum_{i=1}^K Z_i = \frac{(\overline{E_p} - R_L)}{\sigma_p^2} \cdot \sum_{i=1}^K X_i$$

$$\text{Siendo} \quad \sum_{i=1}^K X_i = 1 \quad \sum_{i=1}^K Z_i = \frac{(\overline{E_p} - R_L)}{\sigma_p^2} \cdot 1$$

$$\text{Entonces:} \quad X_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^K Z_i}$$

Obtención de la combinación óptima a través de la resolución mediante el método matricial:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,K} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{K,1} & \sigma_{K,2} & \dots & \sigma_K^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 - R_L \\ E_2 - R_L \\ \dots \\ E_K - R_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,K} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{K,1} & \sigma_{K,2} & \dots & \sigma_K^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} E_1 - R_L \\ E_2 - R_L \\ \dots \\ E_K - R_L \end{bmatrix}$$

Obteniendo las proporciones a invertir : $X_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^K Z_i}$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{proporción a invertir en el activo 1 que } \textit{maximiza} \text{ la pendiente} \\ \text{proporción a invertir en el activo 2 que } \textit{maximiza} \text{ la pendiente} \\ \dots \\ \text{proporción a invertir en el activo K que } \textit{maximiza} \text{ la pendiente} \end{bmatrix}$$

II Obtención de la “Nueva” Frontera Eficiente

- 1) Se determina la composición de la cartera eficiente para “k” activos aleatorios que maximizan la pendiente “m”.

(Optimización restringida) Objetivo:

$$\text{Máx. } m = \left(\frac{\overline{E_p} - R_L}{\sigma_p} \right) = \frac{\sum_{i=1}^K X_i \cdot E_i - 1 \cdot R_L}{\left(\sum_{i=1}^K X_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i}^K X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j} \right)^{1/2}}$$

$$\text{Restricción: } \sum_{i=1}^K X_i = 1$$

(Optimización libre)

$$\text{Máx. } m = \left(\frac{\overline{E_p} - R_L}{\sigma_p} \right) = \frac{\sum_{i=1}^K X_i \cdot (E_i - R_L)}{\left(\sum_{i=1}^K X_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i}^K X_i \cdot X_j \cdot \sigma_{i,j} \right)^{1/2}} = g(X_1, X_2, \dots, X_K)$$

(Optimización mediante el método matricial)

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,K} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{K,1} & \sigma_{K,2} & \dots & \sigma_K^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} E_1 - R_L \\ E_2 - R_L \\ \dots \\ E_K - R_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ \dots \\ X_K^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 / \sum_{i=1}^K Z_i \\ Z_2 / \sum_{i=1}^K Z_i \\ \dots \\ Z_K / \sum_{i=1}^K Z_i \end{bmatrix}$$

PASO 2.- Una vez obtenida la composición de la cartera que maximiza la pendiente “m”, se determina el desvío y el rendimiento esperado asociado dicha cartera.

$$\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} X_1^* & X_2^* & \dots & X_K^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,K} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{K,1} & \sigma_{K,2} & \dots & \sigma_K^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ \dots \\ X_K^* \end{bmatrix} \quad \sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}$$

$$\overline{E_c} = \begin{bmatrix} X_1^* & X_2^* & \dots & X_K^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_K \end{bmatrix}$$

PASO 3.- Una vez determinada la pendiente “m” de la recta y la ordenada al origen (el rendimiento libre de riesgo) se obtiene la “Nueva” Frontera Eficiente para el caso en el cual se puede operar con un activo libre de riesgo.

$$m = \left(\frac{\overline{E_P} - R_L}{\sigma_P} \right)$$

La “nueva” frontera eficiente es una recta que tiene como ordenada el origen a la tasa libre de riesgo y es tangente a la frontera eficiente constituida por activos riesgosos exclusivamente.

4.3 Relación con la teoría de cartera

El objetivo del análisis de cartera implica la solución de un problema de optimización. Tal problema integra:

- Una o más variable de decisión
- Una o más condiciones limitadas (o restricciones)
- Un objetivo a minimizar.

Las variables de decisión son las proporciones (X) invertidas en los diversos títulos. Hay n títulos y por lo tanto habrá n variables de decisión. Varias restricciones pueden aparecer al asignar los valores a las X donde estos valores han de sumar siempre uno. Para nuestro caso los valores de X siempre han de ser no negativos. Pueden existir límites a las cantidades a invertir en los diferentes títulos. El conjunto apropiado de restricciones depende de la situación del inversionista. La función objetivo está dada por la expresión de varianza de cartera, la misma que tendremos que minimizar, entonces el problema queda definido de la siguiente manera:

Las dos variantes del modelo de programación cuadrática son las siguientes:

1. Cartera compuesta solo por activos riesgosos:

Cuando un portafolio solo contiene esta clase de activo, el problema formal de optimización es el siguiente:

$$\text{Min } \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

sujeto a :

$$E(\overline{R_p}) = \sum_{i=1}^n x_i E(\overline{R_i}) = E^*$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

De donde : $E(R_p)$ es la rentabilidad esperada (o ganancia por obtener) de la cartera

σ_p = varianza de la cartera

$E(R_i)$ = ganancia esperada del activo i

X_i = proporción de la inversión total en el activo i

ρ_{ij} = coeficiente de correlación entre el activo i y el activo j

La primera restricción hace referencia a la ganancia objetivo, que viene dada por E^* , con la segunda restricción, se asegura en la formación de portafolios representa que la suma de las proporciones invertidas en las acciones que forman el portafolio sea igual al 1 y la tercera tiene como función garantizar que los valores sean positivos.

2. *Cartera compuesta por activos riesgosos y un activo libre de riesgo* : para un problema de optimización cuando están presentes activos riesgosos y un activo libre de riesgo, el modelo es el siguiente:

$$\text{Min } \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

sujeto a :

$$E(\overline{R_p}) = E(R_f) x_f + \sum_{i=1}^n x_i E(\overline{R_i}) = E^*$$

$$x_f + \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$x_i \geq 0$$

Donde x_f representa el activo libre de riesgo. Aquel activo que tiene el nivel más bajo de riesgo, en relación a todos los activos disponibles.

En este caso, se ha eliminado la tercera restricción ya que se trabaja en un ambiente donde se puede dar y pedir prestado. Por equivalencia las ecuaciones actuales son similares a las anteriores, sólo que se les ha agregado el activo libre de riesgo (x_f). Al solucionar ambos modelos para distintas ganancias objetivo, estos dan como resultado la frontera eficiente.

CAPITULO V

APLICACIÓN DEL MODELO DE MARKOWITZ POR EL MÉTODO MEDIA – VARIANZA, PARA LA DETERMINACIÓN DE LA CARTERA ÓPTIMA EMPLEANDO LA PROGRAMACIÓN CUADRÁTICA. CASO: MERCADO DE VALORES PERUANO.

5.1 Marco de trabajo

Desde su aparición, el modelo de Markowitz ha sido un instrumento esencial y fundamental en la selección de carteras de inversión, dando lugar a múltiples desarrollos y derivaciones. Sin embargo, su utilización en la práctica, entre gestores de carteras y analistas de inversiones, no ha sido aprovechada tan ampliamente para el análisis de sus inversiones.

Con este trabajo vamos a demostrar que el modelo de Markowitz puede ser de gran utilidad en la práctica. A través de un estudio empírico queremos probar que el modelo de Markowitz es capaz de proporcionar carteras que nos ofrezcan una mayor rentabilidad y un menor riesgo que la cartera representada. En todo caso, quedará demostrada la capacidad de nuestro mercado aun insuficiente, pero que permite plantear alternativas para mejorar los rendimientos futuros en el movimiento bursátil.

Bajo esta óptica se ha venido sustentando, con referencia teórica, los fundamentos esenciales que se requieren para determinar la optimización de carteras de inversión, reduciendo obviamente el riesgo. En este sentido H. Markowitz en su trabajo concluye que la cartera depende del grado de covarianza entre las rentabilidades de los activos componentes de un portafolio. La idea central es combinar en un portafolio activos que no estén perfectamente correlacionados, con el propósito de disminuir el riesgo sin sacrificar su rentabilidad.

De esta manera, establecido el marco de trabajo de esta investigación, que trata de realzar no solamente el trabajo de Markowitz dentro del ámbito financiero,

sino también reconocer su modelo de Media - Varianza, que asume que los individuos tienen una cantidad dada de riqueza.

Para el desarrollo eficiente de este trabajo, se han utilizado herramientas de Investigación de Operaciones, específicamente la Programación no Lineal, con el propósito de obtener resultados esperados en cuanto a su rendimiento y riesgo asumido.

Una vez definido el modelo de programación no lineal para su ejecución nos valdremos de instrumentos estadísticos y modelos matriciales, con la finalidad de contribuir al cálculo de sus estimaciones, contando para ello con información bursátil suficiente para lograr adecuados resultados.

Aunque los modelos matriciales no predicen lo que pasará en el futuro con una población, si nos proporcionan un excelente y apropiado marco de trabajo sobre el cual comprenda la dinámica del mercado accionario. Los resultados obtenidos se deben siempre entender en términos probabilísticos y las decisiones que se tomen a raíz de su análisis estarán sujetas a un determinado riesgo.

Para protegerse de los riesgos financieros se desarrollará un sistema de recolección de datos estadísticos, que sirven también para la predicción de los precios de mercado. Este es el propósito del trabajo de investigación, cuyos resultados demostrarán la importancia del modelo de investigación de operaciones y su aplicación en el Mercado de Valores Peruano.

Los componentes principales de este *marco trabajo* son:

- a. Rendimiento, media muestral
- b. Varianza y desviación estándar
- c. Covarianza muestral
- d. Matriz varianza covarianza
- e. Coeficiente de correlación lineal
- f. Rentabilidad, riesgo y posibilidad de pérdida de las acciones seleccionadas
- g. Máxima rentabilidad del portafolio
- h. Mínimo riesgo de portafolio

- i. Frontera eficiente del portafolio
- j. Planteo del problema de optimización (Método de Lagrange)

Finalmente, con este trabajo demostraremos que el modelo de Markowitz puede ser de gran utilidad en la práctica. A través de un estudio empírico se podrá verificar, que el modelo de Markowitz es capaz de proporcionar carteras que ofrezcan una mayor rentabilidad y un menor riesgo dentro del Mercado de Valores Peruano.

5.2 Información bursátil

Para el estudio se ha considerado una muestra de 10 empresas accionarias del Mercado de Valores Peruano, pertenecientes a diferentes sectores económicos, que representan un tamaño muestral del 23% de la población. Todas ellas componentes del índice de precios y cotizaciones.

Los rendimientos de las acciones comprenden el periodo de Enero de 2001 a Febrero de 2006, obtenidos de CONASEV (o Mercado de Valores)

Origen de los datos	CONASEV
Periodo de la muestra	Enero de 2001 a Febrero 2006
Criterio de selección	Todos los componentes del Índice de precios, alto índice de bursatilidad. Diversificación sistemática a través de los sectores industriales de mayor trascendencia.
Intervalo de tiempo	Rendimientos de cierre semanal

En la siguiente tabla se muestra la información bursátil.

Tabla No. 12 Relación de empresas accionarias, según horizonte temporal

INFORMACION BURSÁTIL DE 10 EMPRESAS ACCIONARIAS (MERCADO DE VALORES PERUANO)				
No.	EMPRESAS	INICIO	TERMINO	
1	Minera Atacocha	07/01/2001	01/06/2006	
2	Telefónica del Perú	07/02/2001	01/06/2006	
3	Backus & Johnston S.A	07/02/2001	01/06/2006	
4	Corpor. Aceros Arequipa	07/02/2001	01/06/2006	
5	Edelnor	07/02/2001	01/06/2006	
6	Cartavio SA	07/02/2001	01/06/2006	
7	Southern Perú	07/02/2001	01/06/2006	
8	Luz del Sur	07/02/2001	01/06/2006	
9	Cementos Lima	07/02/2001	01/06/2006	
10	Tumán Agro Industria	07/02/2001	01/06/2006	

Nota: La información se encuentra en el Anexo

5.3 Formulación del modelo de Programación Cuadrática

1. Información: selección de carteras de inversión

Para la selección de las acciones se ha utilizado de criterios heurísticos y de la experiencia de estudios financieros relacionados con el mercado bursátil. Dicha labor ha permitido sentar las condiciones para la aplicación del modelo clásico de Markowitz.

Para cumplir con ello, se decide escoger aquellos portafolios que poseen alta participación dentro de la Bolsa de Valores de Lima. Se aprecia además la composición variada del portafolio en la Tabla No 13, pues hay acciones correspondientes a diversos sectores de la economía nacional. El período considerado: 07/2/2001 al 01/06/2006

Tabla No.13. Empresas accionarias de diversos sectores

Empresas Accionarias	
Top	
1	Minera Atacocha (MINA)
2	Telefónica del Perú (TELEP)
3	Backus & Johnston (B&J)
4	Corporación Aceros Arequipa (CAA)
5	Edelnor (EDEL)
6	Cartavio S.A (CAR)
7	Southern Perú (SOUP)
8	Luz del Sur (LUZS)
9	Cementos Lima (CEML)
10	Tuman Agro Industria (TUMA)

2. Formulación del modelo

Se plantea un modelo general en el que se minimiza el riesgo con un rendimiento aceptado, según el método de Media – Varianza.

Sea:

R_i = rendimiento de la acción i

X_i = proporción invertida en la acción i

σ^2_i =varianza para la acción i

$COV = \sigma_{i, i+1}$ =covarianza entre la acción i a $i+1$, con $i = 1, 2, \dots, 10$

R_p = tasa de rendimiento esperado 1.5%

X_1 : MINA	X_5 : EDEL	X_9 : CEML
X_2 : TELEP	X_6 : CAR	X_{10} : TUMA
X_3 : B& J	X_7 : SOUP	
X_4 : CAA	X_8 : LUZS	

El modelo de programación cuadrática propuesto en esta investigación puede establecerse mediante dos perspectivas:

- a) Búsqueda del portafolio de varianza mínima global
- b) Búsqueda del conjunto de portafolio eficiente:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z = & X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + X_3^2\sigma_3^2 + X_4^2\sigma_4^2 + X_5^2\sigma_5^2 + X_6^2\sigma_6^2 + X_7^2\sigma_7^2 + X_8^2\sigma_8^2 + X_9^2\sigma_9^2 + X_{10}^2\sigma_{10}^2 \\
 & + 2 * (X_1X_2\sigma_{1,2} + X_1X_3\sigma_{1,3} + X_1X_4\sigma_{1,4} + X_1X_5\sigma_{1,5} + X_1X_6\sigma_{1,6} + \\
 & X_1X_7\sigma_{1,7} + X_1X_8\sigma_{1,8} + X_1X_9\sigma_{1,9} + X_1X_{10}\sigma_{1,10} + X_2X_3\sigma_{2,3} + X_2X_4\sigma_{2,4} \\
 & + X_2X_5\sigma_{2,5} + X_2X_6\sigma_{2,6} + X_2X_7\sigma_{2,7} + X_2X_8\sigma_{2,8} + X_2X_9\sigma_{2,9} + X_2X_{10}\sigma_{2,10} + X_3X_4\sigma_{3,4} \\
 & + X_3X_5\sigma_{3,5} + X_3X_6\sigma_{3,6} + X_3X_7\sigma_{3,7} + X_3X_8\sigma_{3,8} + X_3X_9\sigma_{3,9} + X_3X_{10}\sigma_{3,10} \\
 & + X_4X_5\sigma_{4,5} + X_4X_6\sigma_{4,6} + X_4X_7\sigma_{4,7} + X_4X_8\sigma_{4,8} + X_4X_9\sigma_{4,9} + X_4X_{10}\sigma_{4,10} \\
 & + X_5X_6\sigma_{5,6} + X_5X_7\sigma_{5,7} + X_5X_8\sigma_{5,8} + X_5X_9\sigma_{5,9} + X_5X_{10}\sigma_{5,10} + X_6X_7\sigma_{6,7} \\
 & + X_6X_8\sigma_{6,8} + X_6X_9\sigma_{6,9} + X_6X_{10}\sigma_{6,10} + X_7X_8\sigma_{7,8} + X_7X_9\sigma_{7,9} + X_7X_{10}\sigma_{7,10} \\
 & + X_8X_9\sigma_{8,9} + X_8X_{10}\sigma_{8,10} + X_9X_{10}\sigma_{9,10})
 \end{aligned}$$

Sujeto a :

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 1$$

$$R_1X_1 + R_2X_2 + R_3X_3 + R_4X_4 + R_5X_5 + R_6X_6 + R_7X_7 + R_8X_8 + R_9X_9 + R_{10}X_{10} \geq \bar{R}_p$$

$$X_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, 10$$

Como se señala, un Modelo de Programación no Lineal para un problema de optimización, operando con activos perteneciente a las empresas accionarias de mayor trascendencia en el mercado bursátil, se caracteriza por sus siguientes componentes:

1. Función objetivo: minimizar el riesgo de la cartera

2. Restricciones:

- Obtener un determinado rendimiento esperado de la cartera de inversión.
- La totalidad del capital disponible debe invertirse en los distintos activos que forman la composición de la cartera.

3. Variables de decisión :

- Las proporciones de capital a invertir en cada uno de los activos de la cartera de inversión.

La solución del modelo de programación cuadrática requiere:

- Emplear el método de Lagrange.
- Aplicar la condición de primer orden de KKT – Karush-Kuhn-Tucker.
- La combinación óptima se obtendrá mediante el método matricial

Función objetivo: Minimizar Riesgo.

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + X_3^2 \sigma_3^2 \dots\dots\dots + X_9^2 \sigma_9^2 + X_{10}^2 \sigma_{10}^2 \\ & + 2X_1 X_2 \sigma_{1,2} + 2X_1 X_3 \sigma_{1,3} + 2X_1 X_4 \sigma_{1,4} + 2X_1 X_5 \sigma_{1,5} \dots\dots\dots + \\ & \dots\dots\dots + 2X_8 X_9 \sigma_{8,9} + 2X_8 X_{10} \sigma_{8,10} + 2X_9 X_{10} \sigma_{9,10} \end{aligned}$$

Sujeto a :

Restricciones :

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} = 1$$

$$R_1 X_1 + R_2 X_2 + R_3 X_3 + R_4 X_4 + R_5 X_5 + R_6 X_6 + R_7 X_7 + R_8 X_8 + R_9 X_9 + R_{10} X_{10} \geq \overline{R_p}$$

$$X_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, 10$$

El método de Lagrange se formula:

$$\begin{aligned} \text{Min } L = & \frac{1}{2} (X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + \dots\dots\dots + 2X_1 X_2 \sigma_{1,2} + 2X_1 X_3 \sigma_{1,3} + \\ & \dots\dots\dots + 2X_8 X_{10} \sigma_{8,10} + 2X_9 X_{10} \sigma_{9,10}) + \lambda_1 [\overline{R_p} - (X_1 R_1 + X_2 R_2 + \dots\dots\dots X_{10} R_{10})] \\ & + \lambda_2 [1 - (X_1 + X_2 + \dots\dots\dots + X_{10})] \end{aligned}$$

CONDICION DE PRIMER ORDEN, derivando la funcion objetivo

$L(X_1, X_2, \dots, X_{10}; \lambda_1; \lambda_2)$ con respecto a cada una de las variables de las cuales depende la funcion y se iguala a cero.

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = X_1 \sigma_{11} + X_2 \sigma_{12} + \dots\dots\dots + \lambda_1 \overline{R}_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = X_2 \sigma_{21} + X_2 \sigma_{22} + \dots\dots\dots + \lambda_1 \overline{R}_2 + \lambda_2 = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = X_1 \overline{R}_1 + X_2 \overline{R}_2 + \dots\dots\dots X_{10} \overline{R}_{10} - \overline{R}_p = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = X_1 + X_2 + X_3 + \dots\dots\dots X_{10} - 1 = 0$$

Este sistema puede representarse mediante el algebra de matrices como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1,10} & \bar{R}_1 & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2,10} & \bar{R}_2 & 1 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \dots & \sigma_{3,10} & \bar{R}_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{10,1} & \sigma_{10,2} & \sigma_{10,3} & \dots & \sigma_{10}^2 & \bar{R}_{10} & 1 \\ \bar{R}_1 & \bar{R}_2 & \bar{R}_3 & \dots & \bar{R}_{10} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_{10} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \bar{R}_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolución del sistema de ecuaciones en su forma matricial

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_{10} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1,10} & \bar{R}_1 & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2,10} & \bar{R}_2 & 1 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \dots & \sigma_{3,10} & \bar{R}_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{10,1} & \sigma_{10,2} & \sigma_{10,3} & \dots & \sigma_{10}^2 & \bar{R}_{10} & 1 \\ \bar{R}_1 & \bar{R}_2 & \bar{R}_3 & \dots & \bar{R}_{10} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \bar{R}_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{1 \text{ cartera eficiente}} \\ X_{2 \text{ cartera eficiente}} \\ X_{3 \text{ cartera eficiente}} \\ X_{4 \text{ cartera eficiente}} \\ X_{5 \text{ cartera eficiente}} \\ X_{6 \text{ cartera eficiente}} \\ X_{7 \text{ cartera eficiente}} \\ X_{8 \text{ cartera eficiente}} \\ X_{9 \text{ cartera eficiente}} \\ X_{10 \text{ cartera eficiente}} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{MINA} \\ X_{TELEF} \\ X_{B\&J} \\ X_{CAA} \\ X_{EDEL} \\ X_{CAR} \\ X_{SOUP} \\ X_{LUZS} \\ X_{CEML} \\ X_{TUMA} \\ \text{Valor multiplicador} \\ \text{Valor multiplicador} \end{bmatrix}$$

De acuerdo con el criterio de la Media-Varianza, un inversor racional preferirá para un determinado riesgo, obtener el máximo rendimiento esperado.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{R}$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \dots \\ Z_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \dots \sigma_{1,10} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \dots \sigma_{2,10} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \dots \sigma_{3,10} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{10,1} & \sigma_{10,2} & \sigma_{10,3} \dots \sigma_{10}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{R}_1 - R_f \\ \bar{R}_2 - R_f \\ \bar{R}_3 - R_f \\ \dots \\ \bar{R}_{10} - R_f \end{bmatrix} *$$

$$\begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ X_3^* \\ \dots \\ X_{10}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_1}{\sum_{i=1}^{10} Z_i} \\ \frac{Z_2}{\sum_{i=1}^{10} Z_i} \\ \frac{Z_3}{\sum_{i=1}^{10} Z_i} \\ \dots \\ \frac{Z_{10}}{\sum_{i=1}^{10} Z_i} \end{bmatrix}$$

** Obtenida la composición de la cartera que maximiza la pendiente “ m ”, se procede a determinar el desvío y en rendimiento esperado asociado a dicha cartera.

$$\sigma_p^2 = [X_1^* X_2^* X_3^* \dots X_{10}^*] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \dots \sigma_{1,10} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \dots \sigma_{2,10} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \dots \sigma_{3,10} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{10,1} & \sigma_{10,2} & \sigma_{10,3} \dots \sigma_{10}^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ X_3^* \\ \dots \\ X_{10}^* \end{bmatrix}$$

$$R_c = [X_1^* X_2^* X_3^* \dots X_{10}^*] * \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \dots \\ \bar{R}_{10} \end{bmatrix}$$

Finalmente, el proceso concluye una vez determinada la pendiente “ m ” de la recta, se obtiene la nueva frontera eficiente, siempre y cuando se trabaje con un activo libre de riesgo.

5.4 Procesamiento de datos – Programa Excel – Solver

a) El rendimiento esperado.

La tabla No. 12 muestra los precios de 10 empresas accionarias utilizadas en el presente trabajo. Cabe establecer aquí, que la tabla ya mencionada presenta precios de cierre promedio/ semanal, que abarca del 07 de Enero 2001 al 01 de Junio de 2006 para el cálculo del portafolio óptimo por el método de Markowitz.

El rendimiento de las acciones se calcula determinando la variación porcentual de los precios de las acciones entre dos periodos.

A continuación se muestra la **grafica** No 32. (pag. 152) en la que se observan las tendencias de los rendimientos de cada portafolio correspondientes a las empresas accionarias dentro del periodo de estudio.

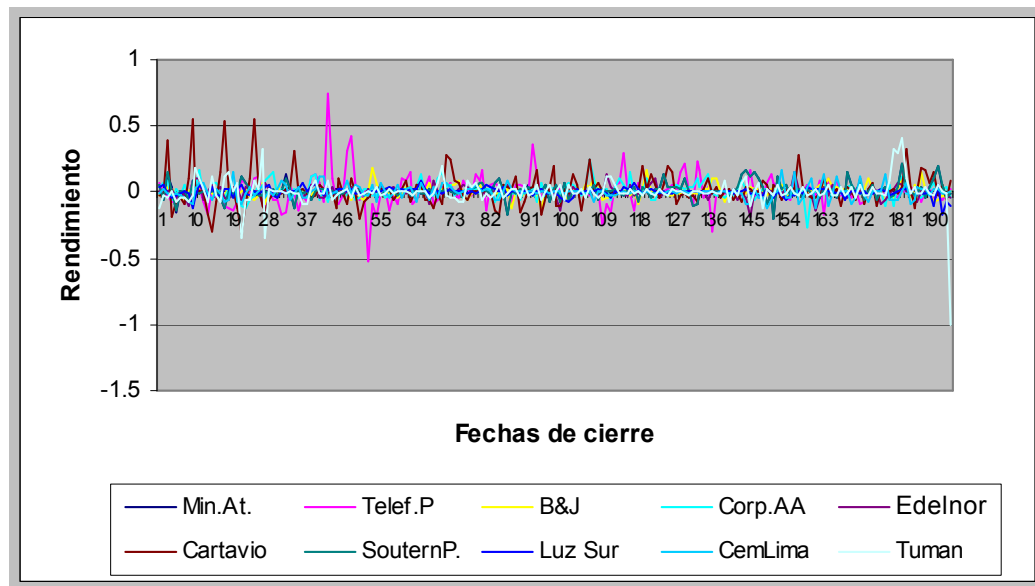
b) Media Aritmética

La media aritmética se calcula sumando los rendimientos de un activo y dividiendo esa suma por la cantidad de observaciones. La fórmula es la siguiente: :

$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}$$

Donde el rendimiento promedio \overline{R} es igual a la suma de los retornos de los i rendimientos del activo para cada período (R_i) y n es la cantidad de observaciones

Una vez obtenidos los rendimientos de las acciones y la media de los activos, se procede a determinar: la varianza, covarianza, coeficiente de correlación, el indicador Beta, el riesgo total, sistemático y no sistemático de estas acciones.



Grafica No. 32. Evolución de los rendimientos a la fecha de cierre

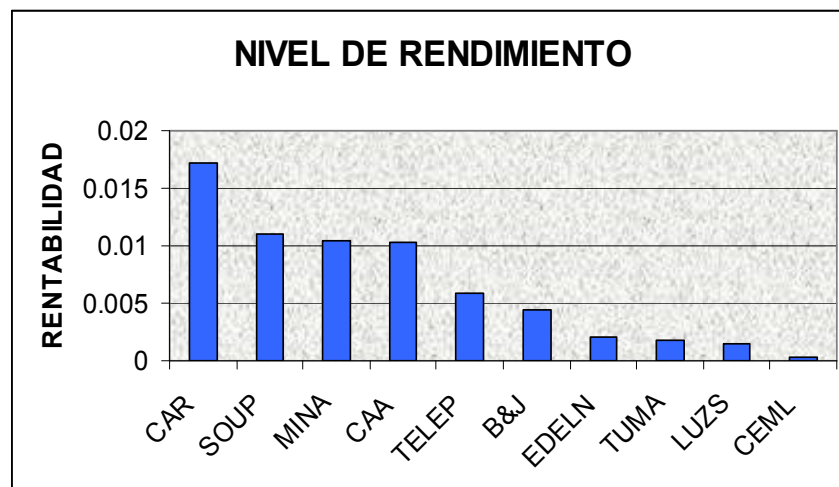
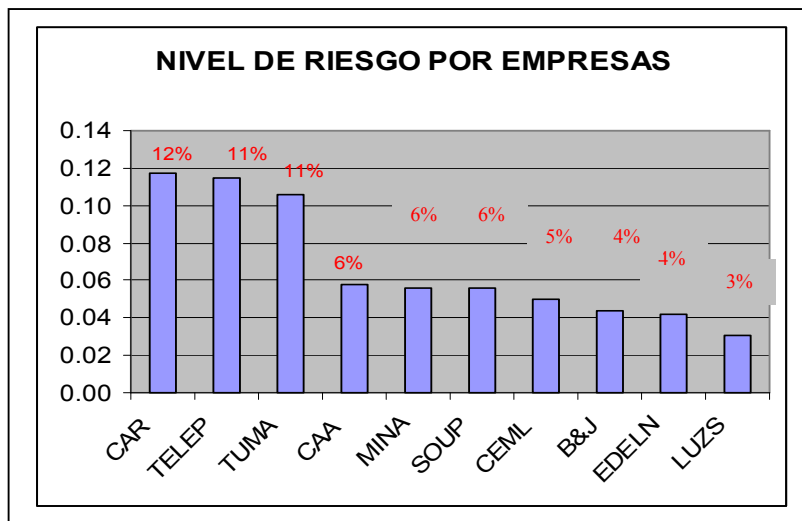


Grafico No. 33 – Nivel de rendimiento por empresas

La grafica No. 33 proporciona el nivel de rendimiento producido en las empresas accionarias, registrándose en la Bolsa de Valores de Lima una proporción superior al 1.7%, correspondiente a los activos de la empresa Cartavio S.A., seguida de Southern Perú, Minera Atacocha y Corporación de Aceros Arequipa, con 1.04%.

Asimismo, la grafica No.34, muestra los niveles de riesgo o volatilidad, que afrontan las empresas accionarias, cuyo resultado del análisis de riesgo obtenido a través de las formulas planteada en relación a las proporciones optimas de inversión, siendo los activos de la empresa Cartavio S. A los más riesgosos en términos bursátiles, es decir recae en ella el 12%, acompañada de Southern Perú, Aceros Arequipa y Telefónica, con 11%, y la menos riesgosa corresponde a la empresa Luz del Sur con un 3%.



Gráfica No-34- Niveles de riesgo por empresas accionarias

Los rendimientos promedio que muestran en la tabla 4 (Pág. 154) fueron obtenidos a través de los precios de cierre promedio semanales de las 10 empresas accionarias seleccionadas, correspondientes a las cotizaciones pertenecientes a la Bolsa de Valores de Lima y calculados en la matriz de retornos.

Tabla 4: Rendimientos obtenidos por 10 acciones del Mercado de Valores Peruano de Febrero 2001 a Junio de 2006

. MINERA ATACOCHA	TELEF. PERU	BACKUS & J.	CORP. AREQ.	EDELNOR	CARTAVIO	SOUTERN Perú.	LUZ DEL SUR	CEM.LIMA	TUMAN AGRO IND.
Fecha Cotización	Rendimiento Semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal
07/02/2001	-0.05333333	-0.028846154	0.034482759	0.012820513	-0.027522936	0.053333333	0.04109589	-0.01485552	-0.12230216
16/02/2001	-0.05063291	-0.02970297	0.066666667	-0.037974684	-0.018867925	-0.05063291	0.048244561	0.02747366	-0.03278689
27/02/2001	0.13083333	0.030612245	0.09375	0.013157895	0.384615385	0.156666667	-0.0167364	-0.00603136	-0.03389831
08/03/2001	0.04642594	0.01980198	-0.057142857	0.025974026	-0.180555556	-0.00072046	-0.03829787	-0.02771036	0.00877193
19/03/2001	-0.15422535	-0.009708738	0.03030303	-0.037974684	-0.076271186	-0.13410238	-0.02212389	-0.00956938	-0.06956522
28/03/2001	0.00166528	-0.019607843	-0.029411765	0.013157895	-0.04587156	-0.00083264	-0.00452489	-0.02604495	-0.03738318
06/04/2001	-0.00166251	-0.05	0.060606061	-0.025974026	-0.096153846	0.005	0.00454546	-0.03623032	-0.03883495
17/04/2001	-0.04662781	0.010526316	-0.028571429	-0.106666667	0.095744681	-0.05140962	-0.00904977	-0.07428955	-0.07070707
26/04/2001	0.09257642	0.041666667	0.029411765	-0.014925373	0.553398058	0.093531469	-0.12328767	-0.0826686	-0.0326087
08/05/2001	0.00079936	-0.02247191	0.028571429	0.106060606	0.0625	0.001598721	-0.046875	0.02582345	0.17977528
17/05/2001	-0.01517572	0.019607843	0.166666667	0.109589041	0.011764706	-0.01596169	0.05464481	0.0662728	0.0952381
28/05/2001	0.00405515	0.009615385	-0.023809524	-0.061728395	0.005813953	0.00405515	0.01554404	0.06504457	0.0173913
06/06/2001	-0.00242326	-0.077348066	-0.048780488	0.013157895	-0.167630058	-0.00242326	-0.03571429	-0.01492875	-0.07692308
15/06/2001	0.0048583	0.036231884	0.076923077	0.051948052	-0.298611111	0.0048583	0.03174603	-0.05419059	0.11111111
26/06/2001	0.00725222	-0.041958042	0.071428571	0.012345679	-0.069306931	0.005640612	-0.03076923	0.01699442	-0.03333333
16/07/2001	-0.0472	-0.03649635	0.022222222	0.036585366	0.14893617	-0.04567308	-0.02116402	-0.01312963	-0.06896552
25/07/2001	-0.11754828	-0.030612245	-0.043478261	-0.035294118	0.527777778	-0.11754828	0.02162162	-0.0682148	0.12037037
03/08/2001	0.00190295	0.031578947	0.022727273	-0.06097561	0.03030303	0.000951475	0.02645503	-0.05192108	0.15702479
14/08/2001	-0.002849	0.040816327	-0.022222222	0.038961039	0.017647059	-0.00190114	-0.04639175	0.15005477	0.01428571
23/08/2001	0.00666667	-0.029411765	0.022727273	0.025	-0.115606936	0.006666667	0.02702703	-0.07119048	0.07042254
04/09/2001	0.12488174	0.084337349	-0.111111111	-0.06097561	-0.320261438	0.124881741	0.05789474	-0.09305306	-0.34868421
13/09/2001	0.06391926	0.077777778	-0.125	0.038961039	-0.096153846	0.06391926	-0.00995025	-0.01074053	-0.05050505
24/09/2001	0.02766798	-0.030927835	-0.057142857	0.025	0.095744681	0.027667984	-0.02512563	0.03342857	-0.06382979
03/10/2001	0.00769231	0.106382979	-0.03030303	0.012195122	0.553398058	0.007692308	0.01030928	-0.02184131	0.07954546
12/10/2001	-0.02442748	0.125	0.0625	0.012048193	0.0625	-0.02442748	-0.01020408	0.01328434	0.02105263
23/10/2001	-0.02190923	-0.068376068	-0.058823529	-0.083333333	-0.111764706	-0.02190923	0.00515464	0.05076709	0.32989691
01/11/2001	0.0008	-0.092783505	0.09375	0.064935065	-0.139072848	0.004	0.04102564	-0.03397929	-0.34883721
12/11/2001	0.00079936	0.021276596	0.114285714	0.024390244	-0.061538462	-0.00398406	0.04926108	0.00714482	0.02380952
21/11/2001	0.00079872	-0.052083333	0.153846154	-0.023809524	-0.008196721	0.02	-0.02816901	-0.02564802	0.01162791

MINERA ATACOCCHA		TELEF. PERU	BACKUS & J.		CORP. AREQ.	EDELNOR	CARTAVIO	SOUTERN PERÚ.	LUZ DEL SUR	CEM. LIMA	TUMÁN AGRO IND.
Fecha	Rendimiento Semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal
Cotización	Semanal	semanal	semanal	semanal	semanal	semanal	semanal	semanal	semanal	semanal	semanal
30/11/2001	-0.00239425	-0.054945055	0.034090909	-0.022222222	-0.036585366	0.008264463	-0.01960784	-0.04830918	0.02100252		0.01149425
11/12/2001	0.0016	-0.162790698	0.010989011	0.022727273	0.012658228	-0.008196721	0.0072	0.00507614	0.08859024		0.01136364
20/12/2001	0.1341853	-0.152777778	0.010869565	0.022222222	0.0125	0.016528926	0.10802224	-0.00505051	0.06021668		-0.01123596
02/01/2002	0.00140845	0.032786885	-0.021505376	-0.02173913	0.012345679	0.040650407	0.017921147	0.01015228	-0.0513308		0.01136364
11/01/2002	-0.12025316	-0.015873016	-0.010989011	0.022222222	0.012195122	0.3125	-0.11901409	0.00502513	-0.00676353		-0.01123596
22/01/2002	0.0263789	-0.14516129	0.011111111	-0.02173913	-0.012048193	0.011904762	0.025579536	0.02	0.04489281		-0.01136364
31/01/2002	-0.00856698	-0.018867925	0.010989011	0.022222222	-0.036585366	0.017647059	-0.00779423	0.06372549	-0.0407917		-0.09195402
11/02/2002	-0.00157109	-0.076923077	0.010869565	-0.02173913	-0.012658228	-0.005780347	-0.00157109	0.00921659	-0.03799698		-0.0886076
20/02/2002	-0.05586153	0.125	-0.021505376	0.111111111	0.051282051	-0.040697674	-0.05886153	0.03652968	0.01046299		0.04166667
01/03/2002	0.01666667	0.12962963	0.021978022	0.14	0.048780488	-0.03030303	0.008333333	0.07048458	0.01630857		0.08
12/03/2002	-0.01639344	0.06557377	-0.021505376	-0.052631579	-0.046511628	0.0625	0.016528926	0.00411523	0.1255731		-0.01234568
21/03/2002	0.00833333	-0.076923077	-0.021978022	0.018518519	-0.036585366	0.017647059	0.016260163	0.02459016	0.12106812		-0.0125
01/04/2002	-0.00826446	0.75	0.011235955	-0.072727273	-0.012658228	0.005780347	0.008	-0.0210084	-0.04299556		0.0886076
10/04/2002	0.025	0.104761905	0.011111111	0.039215686	0.038461538	0.005747126	0.007936508	-0.00411523	-0.01750686		-0.05813954
19/04/2002	0.02764228	-0.077586207	-0.021978022	-0.075471698	0.038461538	-0.12	-0.00551181	0.00826446	0.0096608		-0.02469136
30/04/2002	-0.00474684	-0.08411215	0.02247191	-0.020408163	-0.049382716	0.11038961	-0.00316706	0.01639344	-0.01084414		-0.0265823
10/05/2002	-0.0063593	-0.030612245	0.010989011	0.020833333	-0.025	-0.005847953	-0.00714853	0.02419355	0.00709372		0.01282051
21/05/2002	0.028	0.315789474	-0.032608696	-0.020408163	0.038961039	-0.094117647	0.028	0.01181102	0.08345784		0.02531646
30/05/2002	-0.02645914	0.416	-0.056179775	0.020833333	0.012820513	0.11038961	-0.02645914	0.02723735	-0.01162333		-0.03703704
10/06/2002	-0.00079936	0.050847458	0.023809524	-0.06122449	0.037974684	-0.005847953	-0.00079936	-0.01136364	0.06019534		0.03846154
19/06/2002	0.0288	-0.059139785	-0.034883721	-0.043478261	0.023809524	-0.205882353	0.0288	-0.01532567	0.03609701		-0.02469136
28/06/2002	-0.02799378	0.011428571	-0.060240964	0.022727273	-0.023255814	-0.066666667	-0.02799378	-0.00389105	-0.03157322		-0.01265823

MINERA ATACOCCHA		TELEF. PERU	BACKUS & J.	CORP. AREQ.	EDELNOR	CARTAVIO	SOUTERN Perú.	LUZ DEL SUR	CEM.LIMA	TUMAN AGRO IND.
Fecha Cotización	Rendimiento Semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal
16/09/2002	-0.0172956	-0.094339623	-0.041666667	-0.022727273	0.010416667	-0.016260163	-0.01806756	0.00704225	0.04848019	0.01265823
25/09/2002	0.0048	0.104166667	-0.010869565	0.023255814	0.020618557	0.024793388	0.0056	0.01748252	-0.04825688	0.0125
04/10/2002	0.01910828	0.094339623	0.032967033	0.022727273	-0.01010101	0.088709677	0.018297534	0.00687285	0.01465202	0.01234568
15/10/2002	-0.0234375	0.155172414	0.042553191	0.022222222	0.010204082	-0.066666667	-0.0234375	0.02047782	0.03553107	-0.01219512
24/10/2002	0.008	-0.089552239	0.020408163	-0.043478261	-0.02020202	-0.03968254	0.0072	0.02006689	0.00183486	-0.02469136
04/11/2002	0.00873016	-0.06557377	0.03	0.045454545	0.020618557	0.049586777	0.009531374	0.0295082	-0.07289377	0.01265823
13/11/2002	-0.00472069	0.01754386	0.029126214	0.130434783	-0.01010101	0.05511811	-0.00472069	0.09235669	0.06440142	0.0125
22/11/2002	-0.01185771	0.034482759	0.009433962	-0.019230769	0.010204082	-0.052238806	-0.01185771	0.01749271	0.01150705	0.01234568
03/12/2002	0.0168	0.116666667	0.065420561	-0.019607843	-0.090909091	-0.05511811	0.0168	-0.00859599	-0.06513762	-0.03658537
12/12/2002	-0.00472069	-0.089552239	-0.01754386	-0.02	0.088888889	-0.116666667	-0.00393391	-0.00289017	0.03866536	-0.01265823
23/12/2002	-0.00158103	-0.06557377	0.008928571	0.102040816	0.010204082	-0.009433962	-0.00157978	0.00289855	-0.03571429	0.06410256
06/01/2003	0.00712589	0.035087719	0.026548673	0.148148148	-0.01010101	-0.085714286	0.007120253	-0.00578035	0.07133059	0.19277108
15/01/2003	0.01572327	0.016949153	0.043103448	0.032258065	0.010204082	0.28125	0.015710919	0.01162791	0.0735321	-0.02020202
24/01/2003	0.00619195	0.066666667	0.05785124	0.046875	0.03030303	0.243902439	0.005413766	0.01724138	0.03544045	-0.04123711
04/02/2003	-0.00692308	-0.03125	0.0546875	-0.029850746	-0.009803922	0.08496732	-0.00615385	0.00564972	0.01299984	-0.04301075
13/02/2003	0.00154919	-0.048387097	0.081481481	0.015384615	0.01980198	0.078313253	0.003095975	0.01404494	-0.00178688	-0.07865169
25/02/2003	0.00618716	0.084745763	-0.020547945	-0.045454545	0.058252427	-0.0279332961	0.00308642	0.00277008	0.00667209	-0.07317073
06/03/2003	-0.00076864	0.015625	-0.062937063	0.031746032	0.04587156	-0.051724138	0.015384615	-0.00276243	0.02004526	0.09210526
17/03/2003	0.03846154	-0.030769231	-0.014925373	0.015384615	0.00877193	0.006060606	0.022727273	0.00554017	0.02218701	0.03614458
26/03/2003	0.03703704	0.126984127	0.007575758	0.015151515	-0.008695652	0.006024096	0.037037037	-0.00275482	0.05891473	0.06976744
04/04/2003	0.06928571	0.084507042	0.052631579	-0.014925373	0.01754386	0.005988024	0.069285714	0.01104972	0.02547584	0.01086957
15/04/2003	0.07682031	0.168831169	0.014285714	0.03030303	0.00862069	0.005952381	0.076820307	0.02185792	0.00799543	-0.06451613
24/04/2003	0.01054591	-0.133333333	0.007042254	0.029411765	-0.025641026	0.01183432	0.010545906	0.05614973	0.01558074	-0.01149425
06/05/2003	-0.01104972	0.051282051	-0.006993007	0.028571429	0.00877193	0.011695906	-0.01104972	0.03291139	0.0055788	-0.04651163
15/05/2003	0.06579764	0.073170732	-0.007042254	-0.069444444	0.008695652	-0.132947977	0.066418374	0.01470588	-0.05325936	-0.01219512
26/05/2003	0.10832848	0.045454545	-0.014184397	-0.014925373	0.025862069	-0.166666667	0.107683353	0.00966184	-0.05654849	0.04938272
04/06/2003	0.00735681	-0.02173913	-0.028776978	-0.03030303	0.033613445	0.048	0.007356805	0.04066986	0.0015528	-0.03529412
13/06/2003	-0.16536255	-0.011111111	0.014814815	-0.03125	0.048780488	0.045801527	-0.16536255	-0.01839081	0.08294574	-0.01219512
24/06/2003	0.01375	-0.08988764	-0.124087591	-0.016129032	0.023255814	0.01459854	0.01375	0.00234192	0.0226199	0.02469136

MINERA ATACOCCHA		TELEF. PERU		BACKUS & J.		CORP. AREQ.		EDELNOR		CARTAVIO		SOUTERN Perú.		LUZ DEL SUR		CEM.LIMA		TUMAN AGRO IND.	
Fecha Cotización	Rendimiento Semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal
03/07/2003	-0.0135635	0.049382716	0.008333333	-0.016393443	0.015151515	0.115107914	-0.0135635	0.00934579	0.00097998			-0.0135635	0.00934579	0.00934579	0.00097998	0.02409639		0.02409639	
14/07/2003	0.000625	0.047058824	-0.049586777	-0.05	0.007462687	-0.161290323	0.01875	-0.00462963	0.0041958			0.01875	-0.00462963	-0.00462963	0.0041958	-0.04705882		-0.04705882	
23/07/2003	-0.00062461	0.04494382	-0.008695652	0.01754386	0.007407407	-0.078923077	0.006748466	0.00465116	-0.00417827			0.006748466	0.00465116	0.00465116	-0.00417827	0.04938272		0.04938272	
05/08/2003	0.056875	0.010752688	0.00877193	-0.017241379	0.007352941	0.025	0.030469226	0.01388889	0.0013986			0.030469226	0.01388889	0.01388889	0.0013986	-0.02352941		-0.02352941	
14/08/2003	-0.02720284	0.361702128	-0.017391304	0.035087719	0.00729927	0.040650407	-0.02720284	-0.02739726	0.0027933			-0.02720284	-0.02739726	-0.02739726	0.0027933	-0.01204819		-0.01204819	
25/08/2003	0.00243161	0.140625	-0.017699115	-0.06779661	-0.007246377	0.171875	0.002431611	0.00469484	-0.00417827			0.002431611	0.00469484	0.00469484	-0.00417827	0.04878049		0.04878049	
03/09/2003	0.01091571	-0.047945205	-0.117117117	0.072727273	0.01459854	-0.166666667	0.010915706	0.02336449	0.0027972			0.010915706	0.02336449	0.02336449	0.0027972	-0.05813954		-0.05813954	
12/09/2003	0.04739052	-0.021582734	0.010204082	-0.033898305	-0.014388489	-0.04	0.047390522	-0.00228311	0.0027894			0.047390522	-0.00228311	-0.00228311	0.0027894	0.01234568		0.01234568	
23/09/2003	-0.07159221	0.044117647	0.02020202	0.035087719	0.02189781	0.033333333	-0.07159221	-0.00915332	-0.0069541			-0.07159221	-0.00915332	-0.00915332	-0.0069541	0.04878049		0.04878049	
02/10/2003	0.02837754	-0.042253521	0.01980198	0.016949153	0.007142857	0.201612903	0.028377545	0.00230947	0.00140056			0.028377545	0.00230947	0.00230947	0.00140056	-0.05813954		-0.05813954	
13/10/2003	0.04739052	-0.014705882	-0.019417476	-0.016666667	-0.042553191	-0.100671141	0.047390522	-0.00691244	0.0013986			0.047390522	-0.00691244	-0.00691244	0.0013986	0.01234568		0.01234568	
22/10/2003	-0.07159221	0.037313433	-0.04950495	-0.016949153	-0.133333333	-0.104477612	-0.07159221	-0.04640371	0.00139665			-0.07159221	-0.04640371	-0.04640371	0.00139665	0.04878049		0.04878049	
31/10/2003	0.07279457	-0.021582734	-0.010416667	0.034482759	0.017094017	0.016666667	0.072794571	-0.06569343	-0.0027894			0.072794571	-0.06569343	-0.06569343	-0.0027894	-0.05813954		-0.05813954	
11/11/2003	-0.05405405	0.007352941	-0.063157895	0.066666667	-0.042016807	-0.016393443	-0.05405405	-0.0703125	0.00195804			-0.05405405	-0.0703125	-0.0703125	0.00195804	0.04938272		0.04938272	
20/11/2003	0.00243161	0.00729927	0.02247191	0.046875	0.035087719	0.133333333	0.002431611	-0.03921569	-0.00055835			0.002431611	-0.03921569	-0.03921569	-0.00055835	-0.01176471		-0.01176471	
01/12/2003	-0.00121286	0.007246377	0.032967033	0.014925373	0.008474576	0.058823529	-0.00121286	0.02332362	-0.00139665			-0.00121286	0.02332362	0.02332362	-0.00139665	-0.01190476		-0.01190476	
10/12/2003	-0.00425015	-0.007194245	-0.010638298	-0.029411765	-0.008403361	-0.145833333	-0.00425015	-0.00854701	0.0041958			-0.00425015	-0.00854701	-0.00854701	0.0041958	0.02409639		0.02409639	
19/12/2003	0.00426829	0.014492754	0.053763441	0.015151515	0.008474576	0.040650407	0.004268293	0.00287356	-0.00278552			0.004268293	0.00287356	0.00287356	-0.00278552	-0.04705882		-0.04705882	
05/01/2004	-0.00425015	-0.021428571	0.030612245	0.253731343	-0.008403361	0.25	-0.00425015	0.00573066	0.00139665			-0.00425015	0.00573066	0.00573066	0.00139665	0.03703704		0.03703704	
14/01/2004	0.05914634	0.04379562	0.108910891	0.095238095	0.016949153	0.025	0.059146341	0.01139601	-0.07112971			0.059146341	0.01139601	0.01139601	-0.07112971	-0.01190476		-0.01190476	
23/01/2004	-0.06160046	0.013986014	0.017857143	-0.010869565	-0.016666667	0.073170732	-0.06160046	0.01690141	0.00705706			-0.06160046	0.01690141	0.01690141	0.00705706	-0.03614458		-0.03614458	
03/02/2004	0.02269939	-0.248275862	-0.052631579	0.021978022	-0.025423729	0.005681818	0.022699387	0.00554017	-0.00059639			0.022699387	0.00554017	0.00554017	-0.00059639	0.11392405		0.11392405	
12/02/2004	0.00179964	-0.091743119	-0.046296296	0.021505376	0.130434783	0.005649718	0.00059988	-0.00550964	0.125			0.00059988	-0.00550964	-0.00550964	0.125	0.05050505		0.05050505	
23/02/2004	-0.00179641	-0.151515152	-0.038834951	-0.063157895	0.030769231	0.005617978	-0.00059952	0.00869565	-0.02194357			-0.00059952	0.00869565	0.00869565	-0.02194357	-0.00961539		-0.00961539	
03/03/2004	0.02159568	0.05952381	-0.02020202	0.04494382	0.007462687	-0.016759777	0.021595681	0.00287356	-0.00320513			0.021595681	0.00287356	-0.00287356	-0.00320513	0.00970874		0.00970874	
12/03/2004	-0.00645919	0.06741573	0.010309278	0.107526882	0.007407407	0.005681818	-0.00645919	0.03458213	-0.00961539			-0.00645919	0.03458213	0.03458213	-0.00961539	-0.00970874		-0.00970874	
23/03/2004	-0.03073286	0.294736842	0.010204082	0.048543689	-0.022058824	0.005649718	-0.03073286	0.02506964	-0.00802568			-0.03073286	0.02506964	0.02506964	-0.00802568	-0.00980392		-0.00980392	
01/04/2004	0.01646341	0.008130081	0.02020202	0.009259259	-0.030075188	-0.011235955	0.016463415	0.02506964	-0.00802568			0.016463415	0.02506964	0.02506964	-0.00802568	-0.00980392		-0.00980392	
12/04/2004	0.00119976	-0.016129032	-0.02970297	0.155963303	0.054263566	0.017045455	0.001199964	0.02445562	-0.00275081			0.001199964	0.02445562	0.02445562	-0.00275081	0.01980198		0.01980198	

MINERA ATACOCOCHA		TELEF. PERU	BACKUS & J.	CORP. AREQ.	EDELNOR	CARTAVIO	SOUTERN Perú.	LUZ DEL SUR	CEM. LIMA	TUMAN AGRO IND.
Fecha Cotización	Rendimiento Semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal
21/04/2004	0.04074296	-0.139344262	0.010204082	-0.007936508	-0.029411765	-0.016759777	0.04011976	0.07427056	0.00438098	-0.00970874
30/04/2004	-0.07484168	0.066666667	-0.090909091	0.008	-0.007575758	0.005681818	-0.07829591	0.02716049	0.01130856	0.00980392
11/05/2004	0.03795893	0.008928571	0.022222222	-0.007936508	-0.007633588	0.203389831	0.041848844	-0.00240385	-0.00910543	-0.01941748
20/05/2004	-0.00059952	0.008849558	0.163043478	0.104	0.023076923	0.023474178	-0.00059952	0.00240964	0.0091891	0.01980198
31/05/2004	-0.03779244	0.00877193	0.009345794	-0.050724638	0.07518797	0.128440367	-0.03779244	0.01682692	-0.00638978	-0.00970874
09/06/2004	0.02680798	0.017391304	-0.018518519	-0.053435115	0.104895105	0.056910569	0.02680798	0.00236407	-0.00257235	-0.01960784
18/06/2004	0.02428658	-0.034188034	0.018867925	0.032258065	-0.044303797	-0.038461538	0.024286582	-0.00235849	0.01079948	0.03
29/06/2004	0.12803794	0.008849558	0.009259259	-0.015625	-0.006622517	0.06	0.128037937	0.00236407	-0.00940839	-0.00970874
09/07/2004	0.03888597	0.026315789	-0.018348624	-0.023809524	0.006666667	0.19245283	0.042564372	-0.00235849	-0.00128783	-0.01960784
20/07/2004	0.04097117	0.05982906	-0.028037383	0.024390244	0.006622517	0.158227848	0.037298387	-0.00236407	0.01225016	0.02
02/08/2004	0.03984451	0.008064516	-0.009615385	0.055555556	0.006578947	-0.095628415	0.039844509	0.00236967	-0.01273885	0.00980392
11/08/2004	0.01869159	0.152	-0.009708738	0.037593985	0.006535948	-0.027190332	0.018691589	0.00236407	0.00806452	0.00970874
20/08/2004	0.10733945	0.208333333	0.019607843	0.028985507	-0.006493506	-0.00621118	0.10733945	0.00943396	0.0048	-0.00961539
31/08/2004	0.00455675	0.005747126	-0.009615385	0.042253521	0.013071895	-0.040625	0.004556752	0.0046729	-0.01257962	-0.01941748
09/09/2004	-0.10969072	-0.108571429	-0.009708738	0.040540541	0.006451613	-0.026058632	-0.10969072	0.01162791	0.00048379	0.00990099
20/09/2004	-0.08290875	0.230769231	-0.009803922	0.11038961	0.006410256	-0.073578595	-0.08290875	0.01149425	0.01079948	0.00980392
29/09/2004	0.01111111	0.171875	-0.00990099	0.035087719	0.006369427	-0.025270758	0.011111111	0.00909091	-0.00940839	0.00970874
08/10/2004	0.003996	-0.048888889	0.02	0.09039548	0.006329114	0.018518519	-0.0004995	0.00900901	-0.00128783	-0.00961539
19/10/2004	-0.02039801	0.03271028	0.019607843	0.139896373	-0.056603774	0.098181818	-0.015992	-0.00446429	0.00338491	-0.00970874
28/10/2004	0.00812595	-0.303167421	0.105769231	-0.013636364	0.013333333	-0.006622517	0.008125952	0.00672646	0.00562249	0.00980392
08/11/2004	0.01259446	-0.006493506	0.104347826	-0.023041475	0.006578947	0.033333333	0.012594458	-0.01113586	-0.00910543	-0.00970874
17/11/2004	0.00049751	0.006535948	0.007874016	-0.023584906	-0.019607843	-0.04516129	0.000995025	0.00225225	0.00016121	-0.00980392
26/11/2004	-0.00049727	-0.006493506	-0.0703125	-0.033816425	0.026666667	0.010135135	0.001491054	0.00224719	0.01241135	0.08910891
07/12/2004	-0.02487562	0.006535948	0.008403361	-0.015	0.012987013	0.026755853	-0.02679901	0.00448431	-0.01257762	-0.08
16/12/2004	0.01734694	-0.006493506	-0.016666667	-0.030456853	0.012820513	-0.061889251	-0.00866905	-0.00223214	0.00951306	0.01778656
28/12/2004	0.00802407	0.013071895	0.008474576	0.020942408	-0.050632911	-0.013888889	0.033950617	0.00671141	-0.00654848	-0.02912621
07/01/2005	0.13681592	-0.006451613	0.008403361	0.082051282	-0.006666667	-0.077464789	0.137313433	0.00666667	-0.00369775	0.07
18/01/2005	0.17374179	-0.006493506	-0.016666667	0.023696682	-0.046979866	0.034351145	0.173665792	0.01766004	-0.08471841	0.11214953
27/01/2005	0.11670395	0.169934641	0.033898305	-0.013888889	-0.190140845	0.029520295	0.116287738	-0.00650759	-0.0907969	-0.1092437

MINERA ATACOCCHA		TELEF. PERU	BACKUS & J.	CORP. AREQ.	EDELNOR	CARTAVIO	SOUTERN Perú.	LUZ DEL SUR	CEM. LIMA	TUMAN AGRO IND.
Fecha	Rendimiento Semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal
Cotización										
07/02/2005	0.15158598	-0.022346369	0.016393443	-0.051643192	0.008695652	-0.010752688	0.151585977	-0.00873362	0.03044406	0.00943396
16/02/2005	0.10147869	-0.034285714	0.016129032	-0.004950495	0.00862069	0.003623188	0.101478669	-0.01982379	-0.04290553	0.06542056
28/02/2005	0.03922085	-0.017751479	0.007936508	0.024875622	-0.017094017	0.083032491	0.03527244	-0.02247191	-0.03971687	-0.11403509
09/03/2005	-0.0878926	0.078313253	-0.023622047	0.029126214	0.026086957	0.05	-0.08441393	0.01609195	-0.12244062	0.01980198
18/03/2005	-0.01693974	0.12849162	0.016129032	-0.023584906	0.008474576	-0.053968254	-0.01693974	-0.00678733	-0.05856276	-0.00970874
29/03/2005	-0.20960452	0.064356436	-0.007936508	0.024154589	-0.033613445	0.046979866	-0.20960452	-0.03416857	-0.00247832	-0.01960784
07/04/2005	0.11686919	0.03255814	0.048	-0.014150943	0.034782609	0.025641026	0.116869192	0.01415094	0.00248447	0.05
18/04/2005	0.01792	-0.009009009	0.061068702	0.009569378	-0.008403361	-0.065625	0.01792	-0.03023256	0.16480793	-0.02857143
27/04/2005	0.05124175	-0.045454545	-0.021582734	-0.004739336	0.016949153	0.003344482	0.051241748	-0.05515588	-0.03893617	-0.00980392
06/05/2005	-0.02422249	-0.061904762	-0.007352941	-0.00952381	0.008333333	0.033333333	-0.02422249	-0.02791878	-0.04560549	0.03960396
17/05/2005	0.01133926	0.137055838	-0.02962963	-0.028846154	0.148760331	0.029032258	0.011339258	-0.02088773	0.15309673	-0.00952381
26/05/2005	0.02030303	0.004464286	0.007633588	0.02970297	0.028776978	0.275862069	0.02030303	0.008	-0.09132971	-0.02884615
06/06/2005	-0.04128304	0.004444444	0.022727273	0.014423077	-0.020979021	0.031941032	-0.04128304	-0.0028455	-0.04560549	0.03960396
15/06/2005	0.02230483	0.048672566	-0.007407407	-0.265402844	0.042857143	-0.016666667	0.022304833	0.03713528	0.04384134	-0.02857143
24/06/2005	-0.00636364	0.025316456	0.007462687	-0.012903226	-0.020547945	-0.04842615	-0.00636364	0.02557545	0.10311111	-0.00980392
05/07/2005	0.02744739	-0.024691358	0.022222222	0.013071895	-0.132867133	-0.040712468	0.027447392	0.01496259	-0.12691378	0.02970297
14/07/2005	-0.03621253	0.084388186	0.050724638	-0.012903226	-0.048387097	-0.01061008	-0.03621253	0.01719902	0.01568989	-0.01923077
25/07/2005	0.01632276	-0.167315175	0.04137931	-0.013071895	0.033898305	0.096514745	0.016322759	0.01690821	0.12925943	-0.00980392
05/08/2005	0.00060606	0.098130841	0.105960265	-0.013245033	-0.024590164	0.029339853	0.00030303	0.00475059	-0.10983706	0.04950495
16/08/2005	0.01907935	0.025531915	0.041916168	-0.026845638	0.050420168	-0.002375297	0.019388064	0.00236407	-0.00333983	-0.01886793
25/08/2005	-0.03982169	0.087136929	0.040229885	-0.006896552	-0.04	0.021428571	-0.03982169	-0.00471698	0.12403628	-0.02884615
05/09/2005	0.02135562	-0.022900763	0.022099448	-0.013888889	0.008333333	-0.097902098	0.021355617	0.00710901	-0.00141214	0.03960396
14/09/2005	-0.02575758	-0.0078125	0.016216216	0.014084507	-0.024793388	0.018087855	-0.02575758	-0.05882353	0.0020202	-0.02857143
23/09/2005	0.14712286	-0.019685039	0.026595745	0.034722222	-0.033898305	0.038071066	0.147122862	-0.0325	0.00221774	-0.00980392
04/10/2005	0.06155098	-0.040160643	-0.010362694	0.046979866	-0.00877193	0.012224939	0.061550976	0.00775194	-0.09132971	0.03960396
13/10/2005	-0.00153257	0.025104603	-0.020942408	0.006410256	0.008849558	-0.065217391	-0.00153257	0.00512821	-0.04560549	-0.03809524
24/10/2005	0.07776925	-0.085714286	0.005347594	-0.012738854	0.00877193	0.098191214	0.07776925	-0.0127551	0.1125029	0.04950495
02/11/2005	-0.0505578	-0.066964286	0.026595745	-0.025806452	0.008695652	-0.082352941	-0.0505578	0.00516796	-0.02168474	-0.02830189
11/11/2005	0.00025	0.028708134	0.098445596	0.026490066	-0.025862069	0.020512821	0.00025	-0.01799486	-0.08120205	-0.01941748

MINERA ATACOCOCHA		TELEF. PERU	BACKUS & J.	CORP. AREQ.	EDELNOR	CARTAVIO	SOUTERN Perú.	LUZ DEL SUR	CEM. LIMA	TUMAN AGRO IND.
Fecha Cotización	Rendimiento Semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal	Rendimiento semanal
22/11/2005	0.05248688	-0.004651163	0.018867925	0.012903226	0.042427788	0.077889447	0.052486878	-0.01308901	0.00023197	0.03960396
01/12/2005	-0.05010686	-0.023364486	-0.032407407	-0.025477707	0.008474576	-0.107226107	-0.05010686	0.002655252	0.00069573	-0.00952381
12/12/2005	0.0035	0.004784689	0.009569378	0.013071895	-0.084033613	0.028720627	0.0035	0.02380952	-0.000927	-0.00961539
21/12/2005	0.04583956	-0.033333333	-0.071090047	-0.109677419	-0.064220183	0.007614213	0.045839562	0.00516796	0.13361169	-0.01941748
30/12/2005	-0.04716532	-0.004926108	0.010204082	0.050724638	-0.009803922	0.012594458	-0.04716532	-0.02570694	-0.05872724	0.07920792
11/01/2006	-0.02925	-0.00990099	-0.035353535	-0.103448276	0.02970297	0.029850746	-0.02925	-0.01055409	-0.06282609	0.32110092
20/01/2006	0.04429565	-0.035	0.015706806	0.076923077	0.076923077	-0.012077295	0.044295648	0.00533333	-0.05775922	0.29166667
31/01/2006	0.21233046	0.025906736	0.097938144	0.121428571	0.053571429	0.04400978	0.212330456	0.02387268	-0.00049237	0.4139785
09/02/2006	0.02013832	-0.015151515	0.046948357	-0.012738854	0.008474576	0.325526932	0.020138324	0.01554404	0.07758621	0.09505703
20/02/2006	0.00598205	0.015384615	-0.035874439	-0.006451613	-0.016806723	0.035335689	0.005982054	0.00510204	-0.08342857	-0.00347222
01/03/2006	-0.02338949	0.035353535	0.051162791	-0.032467532	-0.076923077	-0.11774744	-0.0233895	0.01522843	-0.05137157	0.03484321
10/03/2006	-0.01745484	0.03902439	-0.07079646	-0.033557047	-0.074074074	0.001934236	-0.01745484	-0.005	0.04521556	-0.00673401
21/03/2006	0.03635612	-0.0657277	0.147619048	-0.048611111	0.01	0.175675676	0.039867796	-0.00251256	0.02665996	-0.01355932
30/03/2006	-0.0348814	0.010050251	0.024896266	-0.00729927	0.00990099	0.16091954	-0.03814064	-0.00755668	0.02376286	0.03780069
10/04/2006	0.03965304	0.039800995	0.004048583	0.029411765	0.009803922	0.066478076	0.039239983	0.00253807	-0.03350084	-0.01324503
21/04/2006	0.10309893	-0.052631579	-0.080645161	0.071428571	-0.029126214	0.147214854	0.103537361	-0.10126582	0.01485516	-0.03020134
03/05/2006	0.20385377	0.005050505	-0.057017544	0.006666667	0.04	-0.028901734	0.191788223	0.05633803	0.01488168	0.04844291
12/05/2006	0.03934181	-0.050251256	-0.018604651	0.026490066	0.009615385	0.054761905	0.049864007	-0.16533333	-0.01201923	0.00330033
23/05/2006	-0.04260219	-0.026455026	-0.047393365	0.032258065	-0.028571429	-0.062076749	-0.04260219	-0.06709265	-0.01386861	-0.00657895
01/06/2006	-0.00706554	0.02173913	0.004975124	-0.04375	-0.039215686	0.091456077	-0.00706554	-0.10273973	0.01134962	-1
Sumatoria	2.013941137	1.137334743	0.843011217	1.991967961	0.402827846	3.34368423	2.007724364	0.274537613	0.053660216	0.352992906
Media										
Muestral	0.01038114	0.00586255	0.004345419	0.010267876	0.002076432	0.017235486	0.010349095	0.001415142	0.000276599	0.001819551

Fuente: Elaboración propia

Formulación del problema de optimización (Método de Lagrange)

Búsqueda del portafolio de Varianza Mínima Global

Para ello utilizamos la siguiente información:

- a. Rendimientos esperados muestrales (tabla No. 4- Pág. 154). Formula de rendimiento esperado Pág. 88
- b. Matriz Varianza – covarianza (tabla 15- Pág. 162) Formula empleada Pág. 90
- c. Matriz de Correlación Lineal (tabla 16)
- d. Matriz Inversa (tabla 17 Pág. 163). Ecuación Matricial, Pág. 116

Tabla 14.
Rendimientos esperados,
varianza y D. estándar

	MINA	TELP	B&J	CAA	EDEL	CAR	SOUP	LUZS	CEML	TUMA
E_P	0.01038114	0.00586255	0.004345419	0.010267876	0.002076432	0.017235486	0.010349095	0.001415142	0.000276599	0.001819551
σ^2	0.003153981	0.013108017	0.001876879	0.003361087	0.001777549	0.013838891	0.003092057	0.000955978	0.002470891	0.011271404
σ_P	0.056160313	0.114490249	0.043322964	0.057974878	0.042160986	0.117638817	0.05560627	0.03091889	0.049708051	0.106166868

Fuente: Elaboración propia

- Los valores que a continuación se muestran, representan la Matriz varianza – covarianza, asumiendo que los datos obtenidos corresponden a una distribución normal de los retornos de los activos. Este modelo en su forma estricta contribuye a determinar la optimización del portafolio.

Tabla No. 15 Matriz de Varianza - Covarianza entre los rendimientos de los activos (10 actividades productivas)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	TUMA
MINA	0.003153981	-0.00014653	0.000305207	-8.5202E-05	8.04308E-05	-0.000207498	0.003077742	1.64244E-05	-0.000152094	0.000291567	
TELP	-0.00014653	0.013108017	-0.000162991	0.000103131	-0.000136224	0.000492124	-5.63093E-05	0.000288524	-0.000276444	-0.000109383	
B&J	0.000305207	-0.000162991	0.001876879	0.000103356	-0.000148846	0.000672822	0.000288416	6.67804E-05	-7.76241E-06	0.000331229	
CAA	-8.5202E-05	0.000103131	0.000103356	0.003361087	0.000229891	0.000561212	-4.40953E-05	0.000132867	-0.00017979	0.000834814	
EDEL	8.04308E-05	0.000103356	-0.000148846	0.000229891	0.001777549	0.000195145	6.055E-05	9.44398E-05	0.000345857	0.000647728	
CAR	-0.000207498	0.000492124	0.000672822	0.000561212	0.000195145	0.013838891	-9.52649E-05	-0.000573626	3.4204E-05	0.000342741	
SOUP	0.003077742	-5.63093E-05	0.000288416	-4.40953E-05	6.055E-05	-9.52649E-05	0.003092057	6.10442E-06	-0.00014647	0.000284157	
LUZS	1.64244E-05	0.000288524	6.67804E-05	0.000132667	9.44398E-05	-0.000573626	6.10442E-06	0.000955978	-3.53448E-05	0.000474475	
CEML	-0.000152094	-0.000276444	-7.76241E-06	-0.00017979	0.000345857	3.4204E-05	-0.00014647	-3.53448E-05	0.002470891	1.27128E-05	
TUMA	0.000291567	-0.000109383	0.000331229	0.000834814	0.00064728	0.000342741	0.000284157	0.000474475	1.27128E-05	0.011271404	

Fuente: Elaboración Propia

Nota. Las formulas empleadas, se encuentran en la Pág. 89

En la Tabla No. 16 Matriz de Coeficiente de Correlación Lineal, se observa que todos los coeficientes de correlación calculados fueron positivos y menores a uno, como se observa. Esto significa que la diversificación haría posible reducir considerablemente el riesgo para el mismo nivel de rendimientos esperados.

Tabla 16. Matriz de coeficiente de correlación lineal

	MINA	TELP	B&J	CAA	EDEL	CAR	SOUP	LUZS	CEML	TUMA
MINA	1	-0.022789172	0.12544312	-0.026168593	0.033968932	-0.031407521	0.985550515	0.009458787	-0.0544823	0.048901203
TELP	-0.022789172	1	-0.032860776	0.015537498	-0.028221096	0.036538921	-0.008844803	0.081506113	-0.048574817	-0.008998965
B&J	0.12544312	-0.032860776	1	0.041150624	-0.081490692	0.132017456	0.119723119	0.049854821	-0.003604557	0.072014666
CAA	-0.026168593	0.015537498	0.041150624	1	0.094052713	0.082287925	-0.013678182	0.074011637	-0.062387827	0.135631519
EDEL	0.033968932	-0.028221096	-0.081490692	0.094052713	1	0.039345516	0.025827349	0.072447039	0.165028605	0.144608112
CAR	-0.031407521	0.036538921	0.132017456	0.082287925	0.039345516	1	-0.014563251	-0.157708108	0.005849233	0.027442671
SOUP	0.985550515	-0.008844803	0.119723119	-0.013678182	0.025827349	-0.014563251	1	0.003550559	-0.052990635	0.04813332
LUZS	0.009458787	0.081506113	0.049854821	0.074011637	0.072447039	-0.157708108	0.003550559	1	-0.022997168	0.144544128
CEML	-0.0544823	-0.048574817	-0.003604557	-0.062387827	0.165028605	0.005849233	-0.052990635	-0.022997168	1	0.002408928
TUMA	0.048901203	-0.008998965	0.072014666	0.135631519	0.144608112	0.027442671	0.04813332	0.144544128	0.002408928	1

Fuente: Elaboración propia

Nota. La formulas empleada, se encuentran en la Pág. 90

b. Matriz de Varianzas y Covarianzas muestrales (tabla 15)

	MINA	TELP	B&J	CAA	EDEL	CAR	SOUP	LUZS	CEML	TUMA
Z(MINA)	0.003153981	-0.00014653	0.000305207	-8.5202E-05	8.04308E-05	-0.000207498	0.003077742	1.64244E-05	-0.000152094	0.000291567
Z(TELP)	-0.00014653	0.013108017	-0.000162991	0.000103131	-0.000136224	0.000492124	-5.63093E-05	0.000288524	-0.000276444	-0.000109383
Z(B&J)	0.000305207	-0.000162991	0.001876879	0.000103356	-0.000148846	0.000672822	0.000288416	6.67804E-05	-7.76241E-06	0.000331229
Z(CAA)	-8.5202E-05	0.000103131	0.000103356	0.000361087	0.000229891	0.000561212	-4.40953E-05	0.000132667	-0.00017979	0.000834814
Z(EDEL)	8.04308E-05	0.000103356	-0.000148846	0.000229891	0.001777549	0.000195145	6.055E-05	9.44398E-05	0.000345857	0.00064728
Z(CAR)	-0.000207498	0.000492124	0.000672822	0.000561212	0.000195145	0.013838891	-9.52649E-05	-0.000573626	3.4204E-05	0.000342741
Z(SOUP)	0.003077742	-5.63093E-05	0.000288416	-4.40953E-05	6.055E-05	-9.52649E-05	0.003092057	6.10442E-06	-0.00014647	0.000284157
Z(LUZS)	1.64244E-05	0.000288524	6.67804E-05	0.000132667	9.44398E-05	-0.000573626	6.10442E-06	0.000955978	-3.53448E-05	0.000474475
Z(CEML)	-0.000152094	-0.000276444	-7.76241E-06	-0.00017979	0.000345857	3.4204E-05	-0.00014647	-3.53448E-05	0.002470891	1.27128E-05
Z(TUMA)	0.000291567	-0.000109383	0.000331229	0.000834814	0.00064728	0.000342741	0.000284157	0.000474475	1.27128E-05	0.011271404
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
										0

=

Tabla No. 17 . Matriz Inversa

Matriz Inversa

Z(MINA)	11393.2766	75.72680796	-166.4897268	143.7193192	-182.3877582	89.73283692	-11317.28249	-96.69993856	64.64528876	-4.240933357	0.01759813
Z(TELP)	72.47561927	76.31816693	-2.338991274	-5.835830386	-4.610070591	-5.670411117	-78.59586405	-51.77774023	-1.807713223	1.842834679	0.02394296
Z(B&J)	-166.3688272	-2.335560999	494.1734327	-50.38635828	-0.046526228	-43.47121127	64.95314735	-210.5509484	-74.23596417	-11.71318354	0.155977644
Z(CAA)	145.2458845	-4.490118913	-50.4273392	293.8976845	-73.32817242	-17.21292882	-158.7299595	-114.6120598	-2.803042569	-17.53994771	0.079096947
Z(EDEL)	-191.6531834	-14.57353816	0.259040303	-72.48500579	545.8004486	-23.69588033	127.1399494	-194.1776068	-148.4598337	-28.15439005	0.14477844
Z(CAR)	90.40464814	-5.217350839	-43.48484175	-17.14758718	-24.46352976	75.68269785	-92.08231621	27.60581052	-9.455449824	-1.842080945	0.025634611
Z(SOUP)	-11315.88129	-80.64610628	65.01951561	-157.1873095	117.0029714	-91.46340223	11540.89998	4.961418551	-81.87577377	-0.830006903	0.084427169
Z(LUZS)	-90.95086535	-48.046561	-210.6629739	-113.98438	-201.162665	27.63596215	-0.272095056	790.2147906	-116.9947846	-35.77642777	0.336810862
Z(CEML)	67.30610049	0.913078391	-74.31926945	-2.979218419	-148.8601858	-9.646872188	-84.72632989	-118.7523156	367.0392513	4.025761057	0.13761862
Z(TUMA)	-3.836685586	2.3511829	-11.72884617	-17.61131417	-27.94451207	-1.890790954	-1.304019994	-36.21141029	3.948021808	94.22837453	-0.00588539
	0.013984918	0.021212194	0.15606026	0.078883577	0.148069198	0.025695369	0.087882647	0.33749293	0.13682972	-0.006110813	-0.00034192

Fuente: Elaboración propia (formula propuesta: $K_p^* (-H_r) + K_r$ donde $p > r$) (continua-Pág. 164)

0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
1

x

=

0.017598173
0.02394296
0.155977644
0.0709096947
0.144778449
0.025634611
0.084427169
0.03681082
0.13761862
-0.005885392
-0.000341918

Nota. Ecuación matricial, Págs. 148-150, que se emplea para determinar los rendimientos esperados, al utilizar el método de Lagrange

Calculo del rendimiento esperado asociado a dichas carteras (sin tasa libre de riesgo)

$$E(R_p) = \begin{bmatrix} 0.017598173 & 0.02394296 & 0.155977644 & 0.0709096947 \\ 0.144778449 & 0.025634611 & 0.084427169 & 0.3681082 \\ 0.13761862 & 0.005885392 & & = 1 \end{bmatrix}$$

x

T

0.01038114
0.00586255
0.004345419
0.010267876
0.002076432
0.017235486
0.010349095
0.001415142
0.000276599
0.001819551

=

0.003933186

Nota. El valor del rendimiento esperado de la cartera optima para la cual se tiene el mínimo riesgo, se vuelve a minimizar el riesgo de la cartera, pero sujeta a las restricciones. – modelo de programación cuadrática, Pág. 146 donde la RESTRICCIÓN PRESUPUESTAL representa la $\sum x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1$

(Tabla No. 15 – Matriz Varianza Covarianza)

0.017598173	0.003153981	-0.00014653	0.000305207	-8.5202E-05	8.04308E-05	-0.000207498	0.003077742	1.64244E-05	-0.000152094	0.000291567
0.02394296	-0.00014653	0.013108017	-0.000162991	0.000103131	-0.000136224	0.000492124	-5.63093E-05	0.000288524	-0.000276444	-0.000109383
0.155977644	0.000305207	-0.000162991	0.001876879	0.000103356	-0.000148846	0.000672822	0.000288416	6.67804E-05	-7.76241E-06	0.000331229
0.079096947	-8.5202E-05	0.000103131	0.000103356	0.003361087	0.000229891	0.000561212	-4.40953E-05	0.000132667	-0.00017979	0.000834814
0.144778449	8.04308E-05	0.000103356	-0.000148846	0.000229891	0.001777549	0.000195145	6.055E-05	9.44398E-05	0.000345857	0.00064728
0.025634611	-0.000207498	0.000492124	0.000672822	0.000561212	0.000195145	0.013838891	-9.52649E-05	-0.000573626	3.4204E-05	0.000342741
0.084427169	0.003077742	-5.63093E-05	0.000288416	-4.40953E-05	6.055E-05	-9.52649E-05	0.003092057	6.10442E-06	-0.00014647	0.000284157
0.33681082	1.64244E-05	0.000288524	6.67804E-05	0.000132667	9.44398E-05	-0.000573626	6.10442E-06	0.000955978	-3.53448E-05	0.000474475
0.13761862	-0.000152094	-0.000276444	-7.76241E-06	-0.00017979	0.000345857	3.4204E-05	-0.00014647	-3.53448E-05	0.002470891	1.27128E-05
-0.005885392	0.000291567	-0.000109383	0.000331229	0.000834814	0.00064728	0.000342741	0.000284157	0.000474475	1.27128E-05	0.011271404

Varianza y desviación estándar

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.017598173 \\ 0.02394296 \\ 0.155977644 \\ 0.079096947 \\ 0.144778449 \\ 0.025634611 \\ 0.084427169 \\ 0.33681082 \\ 0.13761862 \\ -0.005885392 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_p^2 =$$

0.00034192

$$\sigma_p^2 = [X_1^* X_2^* X_3^* \dots X_{10}^*]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1,10} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2,10} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \dots & \sigma_{3,10} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{10,1} & \sigma_{10,2} & \sigma_{10,3} & \dots & \sigma_{10}^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ X_3^* \\ \dots \\ X_{10}^* \end{bmatrix}$$

$$\sigma_p =$$

0.018491015

Nota: La formula se encuentra en las Págs. 99, 150

Búsqueda del conjunto de portafolios eficiente.

Empleamos nuevamente la matriz varianza covarianza, por medio del método matricial, teniendo en cuenta las condiciones de primer orden del método de Lagrange

Tabla No. 18 – Matriz Varianza Covarianza

0.003154	-0.00014853	0.000305207	-8.5202E-05	8.04308E-05	-0.000207498	0.003077742	1.64244E-05	-0.000152094	0.000291567	0.01038114	1
-0.000147	0.013108017	-0.000162991	0.000103131	-0.000136224	0.000492124	-5.63093E-05	0.000288524	-0.000276444	-0.000109383	0.00586255	1
0.0003052	-0.000162991	0.001876879	0.000103356	-0.000148846	0.000672822	0.000288416	6.67804E-05	-7.76241E-06	0.000331229	0.004345419	1
-8.52E-05	0.000103131	0.000103356	0.003361087	0.000229891	0.000561212	-4.40953E-05	0.000132667	-0.00017979	0.000834814	0.010267876	1
8.043E-05	0.000103356	-0.000148846	0.000229891	0.001777549	0.000195145	6.055E-05	9.44398E-05	0.000345857	0.00064728	0.002076432	1
-0.000207	0.000492124	0.000672822	0.000561212	0.000195145	0.013838891	-9.52649E-05	-0.000573626	3.4204E-05	0.000342741	0.017235486	1
0.0030777	-5.63093E-05	0.000288416	-4.40953E-05	6.055E-05	-9.52649E-05	0.003092057	6.10442E-06	-0.00014647	0.000284157	0.010349095	1
1.642E-05	0.000288524	6.67804E-05	0.000132667	9.44398E-05	-0.000573626	6.10442E-06	0.000955978	-3.53448E-05	0.000474475	0.001415142	1
-0.000152	-0.000276444	-7.76241E-06	-0.00017979	0.000345857	3.4204E-05	-0.00014647	-3.53448E-05	0.002470891	1.27128E-05	0.000276599	1
0.0002916	-0.000109383	0.000331229	0.000834814	0.00064728	0.000342741	0.000284157	0.000474475	1.27128E-05	0.011271404	0.001819551	1
0.01038	0.00586255	0.00434542	0.01026788	0.002076432	0.017235486	0.010349095	0.00141514	0.000276599	0.001819551	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Fuente: elaboración propia

Matriz Inversa

Resolviendo el vector incógnita del problema, haciendo: (Pág., 118)

$W2 = V2^{-1} B2$, el resultado a obtener se muestra en la Pág. 167

La solución del sistema empleando los multiplicadores de Lagrange, nos proporciona lo que hay que invertir en cada uno de los activos para obtener la tasa de rendimiento R_p , y que ese portafolio tenga la varianza mínima dentro de todos los portafolios que tienen esa tasa esperada de rendimiento.

Tabla No. 19. Matriz Inversa

11.165.872	65.09755376	-131.1655169	10.74753824	-107.0179883	31.29802831	-11236.67557	54.05966754	135.9125708	11.8718009	66.83556415	-0.245278515
63.17578	75.88347776	-0.894388373	11.27378416	-1.527782594	-8.060134604	-75.29939974	-45.61234361	1.106801287	2.501773766	2.733276983	0.013192474
-130.9643	-0.679854175	488.6710207	29.67349537	-11.78678945	-34.36888767	52.39709848	-234.0346005	-85.33718753	-14.22304581	-10.41089972	0.196925646
11.475135	-10.74277512	-29.64788131	215.6770666	-28.99192363	-51.58719078	-111.3129557	-25.92775816	39.11991873	-8.061635699	39.31600436	-0.075540201
-114.8517	-10.98371585	-11.67101934	27.57639261	520.3457859	-3.960668872	99.91654021	-245.0937093	-172.5289616	-33.59615028	-22.57240201	0.233559899
31.579759	-7.9669191	-34.34719911	51.54463721	-4.966928866	60.56682123	-71.23097166	66.60420307	8.979922294	2.325950213	17.28897836	-0.042366152
-11236.12	-76.91774696	52.62905579	110.5456007	90.56597226	-70.96657724	11512.62598	-47.91961821	-106.873768	-6.481773411	-23.44350729	0.176634838
59.024389	-41.03648065	-233.9595801	26.28839957	-250.8696465	66.17419782	-53.43302319	690.7875936	-163.9961418	-46.40290819	-44.07860286	0.510180152
138.49345	4.240487568	-85.37725131	38.64661117	-172.4541331	8.645711145	-109.9597297	-165.9464918	344.7295574	-1.018210869	-20.92237753	0.219910217
12.311461	3.105972765	-14.23724	8.168906397	-33.29656568	2.258700668	-7.027967188	-46.91694244	-1.112711623	93.08419938	-4.746034428	0.012781643
67.102002	3.13645362	-10.42337909	39.23697897	-22.23992228	17.24279647	-23.78528877	-44.4857657	-21.02937047	-4.754505132	-19.72167031	0.077568992
-0.249177	0.008911609	0.196938805	0.074996522	0.235290017	-0.041927656	0.181164105	0.51195779	0.219302981	0.012535467	0.077344705	-0.000646129

Fuente: Elaboración propia (formula propuesta: $K_p^* (-H_r) + K_r$ donde $p > r$)

0	Mina	0.088899306
0	Telef	0.026858858
0	B&J	0.144871148
0	Caa	0.121039821
0	Edel	0.120697889
0	CaR	0.04407874
0	Soup	0.059417301
0	Luz	0.289787138
0	Ceml	0.115298329
0	Tuma	-0.01094853
0.50%		-0.021039359
1		-0.000259405

La Varianza del Portafolio se muestra en el siguiente cuadro:

$\sigma_p^2 =$		0.088899306	0.026858858	0.144871148	0.121039821	0.120697889	0.04407874	0.059417301	0.289787138	0.115298329	-0.01094853
0.003154	-0.00014653	0.000305207	-8.5202E-05	8.04308E-05	-0.000207498	0.003077742	1.64244E-05	-0.000152094	0.000291567	<div> <div></div> <div> <div>0.088899306</div> <div>0.026858858</div> <div>0.144871148</div> <div>0.121039821</div> <div>0.120697889</div> <div>0.04407874</div> <div>0.059417301</div> <div>0.289787138</div> <div>0.115298329</div> <div>-0.01094853</div> </div> </div>	
-0.000147	0.013108017	-0.000162991	0.000103131	-0.000136224	0.000492124	-5.63093E-05	0.000288524	-0.000276444	-0.000109383		
0.0003052	-0.000162991	0.001876879	0.000103356	-0.000148846	0.000672822	0.000288416	6.67804E-05	-7.76241E-06	0.000331229		
-8.52E-05	0.000103131	0.000103356	0.003361087	0.000229891	0.000561212	-4.40953E-05	0.000132667	-0.00017979	0.000834814		
8.043E-05	0.000103356	-0.000148846	0.000229891	0.001777549	0.000195145	6.055E-05	9.44398E-05	0.000345857	0.00064728		
-0.000207	0.000492124	0.000672822	0.000561212	0.000195145	0.013838891	-9.52649E-05	-0.000573626	3.4204E-05	0.000342741		
0.0030777	-5.63093E-05	0.000288416	-4.40953E-05	6.055E-05	-9.52649E-05	0.003092057	6.10442E-06	-0.00014647	0.000284157		
1.642E-05	0.000288524	6.67804E-05	0.000132667	9.44398E-05	-0.000573626	6.10442E-06	0.000955978	-3.53448E-05	0.000474475		
-0.000152	-0.000276444	-7.76241E-06	-0.00017979	0.000345857	3.4204E-05	-0.00014647	-3.53448E-05	0.002470891	1.27128E-05		
0.0002916	-0.000109383	0.000331229	0.000834814	0.00064728	0.000342741	0.000284157	0.000474475	1.27128E-05	0.011271404		

$$= \begin{matrix} \begin{matrix} \text{Varianza} \\ 0.000364602 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{Desviación} \\ \text{Estándar} \\ 0.019094554 \end{matrix} \end{matrix} \sigma_p^2 = \begin{bmatrix} X_1^* & X_2^* & X_3^* & \dots & X_{10}^* \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1,10} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2,10} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \dots & \sigma_{3,10} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{10,1} & \sigma_{10,2} & \sigma_{10,3} & \dots & \sigma_{10}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^* \\ X_2^* \\ X_3^* \\ \dots \\ X_{10}^* \end{bmatrix}$$

Repitiendo el procedimiento anterior (cálculo de rendimientos, varianza, covarianza, matriz inversa. Págs. 161 - 163) podemos encontrar numerosos portafolios que forman parte de la curva de varianza mínima. De esta manera, los portafolios que conforman la curva mostrada en la tabla No. 20 se detallan los resultados, así como también su gráfica correspondiente. (Gráfica 35 – curva de varianza mínima)

CURVA DE VARIANZA MINIMA

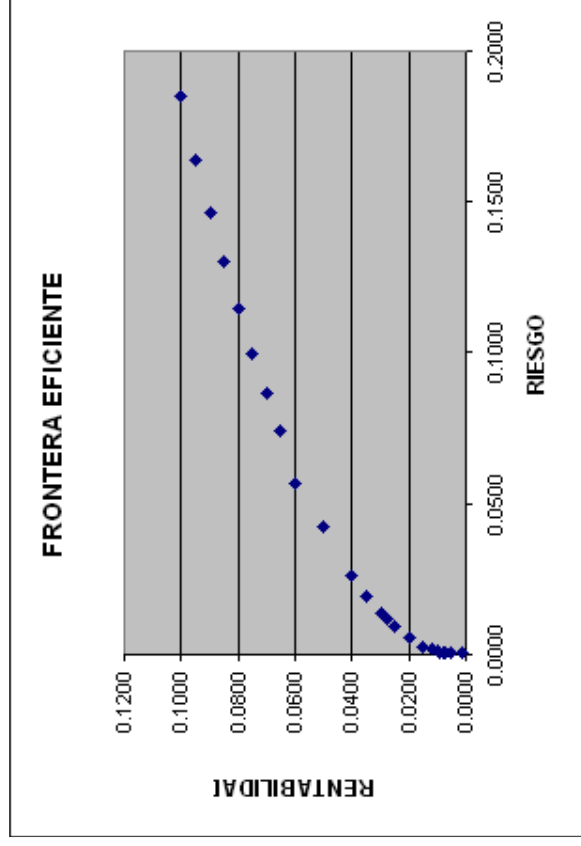


Gráfico No 35.- Curva de varianza Mínima

Búsqueda del portafolio de tangencia

Siguiendo con el procedimiento, se encontrará el portafolio de tangencias, de acuerdo al sistema propuesto en la relación matricial siguiente:

Para el efecto vamos a considerar, las tasas esperadas de rendimiento de los 10 activos y también la tasa de rendimiento del activo libre de riesgo. En este caso, vamos a considerar inicialmente la tasa $R_f = 2\%$.

a) Matriz Varianza - Covarianza

0.003153981	-0.00014653	0.000305207	-8.52E-05	8.04E-05	-0.000207498	0.003077742	1.64E-05	-0.000152094	0.000291567
-0.00014653	0.013108017	-0.000162991	0.000103131	-0.000136224	0.000492124	-5.63E-05	0.000288524	-0.000276444	-0.000109383
0.000305207	-0.000162991	0.001876879	0.000103356	-0.000148846	0.000672822	0.000288416	6.68E-05	-7.76E-06	0.000331229
-8.52E-05	0.000103131	0.000103356	0.003361087	0.000229891	0.000561212	-4.41E-05	0.000132667	-0.00017979	0.000834814
8.04E-05	0.000103356	-0.000148846	0.000229891	0.001777549	0.000195145	6.06E-05	9.44E-05	0.000345857	0.00064728
-0.000207498	0.000492124	0.000672822	0.000561212	0.000195145	0.013838891	-9.53E-05	-0.000573626	3.42E-05	0.000342741
0.003077742	-5.63E-05	0.000288416	-4.41E-05	6.06E-05	-9.53E-05	0.003092057	6.10E-06	-0.00014647	0.000284157
1.64E-05	0.000288524	6.68E-05	0.000132667	9.44E-05	-0.000573626	6.10E-06	0.000955978	-3.53E-05	0.000474475
-0.000152094	-0.000276444	-7.76E-06	-0.00017979	0.000345857	3.42E-05	-0.00014647	-3.53E-05	0.002470891	1.27E-05
0.000291567	-0.000109383	0.000331229	0.000834814	0.00064728	0.000342741	0.000284157	0.000474475	1.27E-05	0.011271404

Matriz Inversa

11393.99639	76.81857924	-158.4574548	147.7793813	-174.7667785	91.05535295	-11312.75926	-79.32950095	71.6877833	-4.555451056
73.45492037	77.80356178	8.589209192	0.311967117	5.758551621	-3.871079583	-72.44183619	-28.14462316	7.773858735	1.41492182
-160.0071197	7.34112024	565.3657576	14.40086642	67.50039737	-31.74937329	105.0438789	-56.59178957	-11.81632	-14.5008439
148.4810621	0.416968551	-14.32539921	312.1460851	-39.07483144	-11.26873341	-138.3997738	-36.53869564	28.85023255	-18.9535825
-185.7315389	-5.591642634	66.33975631	39.08327227	608.4975031	-12.81567032	164.3521664	-51.27271567	-90.52192003	-30.74189639
91.4531402	-3.627007804	-31.7845268	11.23344421	-13.36232917	77.60915827	-85.49348538	52.9086876	0.80309274	-2.300227301
-11312.4281	-75.4083377	103.5543101	137.7091771	153.5645926	-85.11863659	11562.60019	88.29602729	-48.08943287	-2.338904376
-77.17482375	-27.1511887	-56.93360139	36.27899415	-55.30500146	52.94755014	86.29795317	1122.666988	17.79127181	-41.79597101
72.93489778	9.45078598	-1.50648911	28.77067592	-89.2637324	0.69527122	-49.35439456	17.08540047	422.1119211	1.566216462
-4.077406503	1.986059643	-14.415095	18.96912887	-30.49321158	-2.33308264	-2.816734749	-42.02064055	1.592786245	94.33355931

X

Utilizando algebra matricial , se obtiene la combinación óptima, resolviendo R_f : Activo libre de riesgo

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \dots \\ Z_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1,10} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2,10} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \dots & \sigma_{3,10} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{10,1} & \sigma_{10,2} & \sigma_{10,3} & \dots & \sigma_{10}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{R}_1 - R_f \\ \bar{R}_2 - R_f \\ \bar{R}_3 - R_f \\ \dots \\ \bar{R}_{10} - R_f \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \bar{R}_1 - R_f \\ \bar{R}_2 - R_f \\ \bar{R}_3 - R_f \\ \dots \\ \bar{R}_{10} - R_f \end{bmatrix}$$

De donde resulta que $\sum_{i=1}^{10} Z_i = -35.70849137$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \dots \\ X_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Z_1}{\sum_{i=1}^{10} Z_i} \\ \frac{Z_2}{\sum_{i=1}^{10} Z_i} \\ \frac{Z_3}{\sum_{i=1}^{10} Z_i} \\ \dots \\ \frac{Z_{10}}{\sum_{i=1}^{10} Z_i} \end{bmatrix}$$

De manera que el vector Xi para de solución para el *portafolio de tangencia*

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \\ X_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.561411476 & 1/-35.70849137 & -0.071731159 \\ -0.987290786 & & 0.027648628 \\ -7.862516509 & & 0.220186186 \\ -1.725877215 & & 0.048332404 \\ -7.952547233 & & 0.222707455 \\ -0.328782053 & & 0.009207391 \\ -5.158784749 & & 0.144469412 \\ -18.07307998 & & 0.506128355 \\ 3.78287427 & & -0.105937667 \\ 0.036101404 & & -0.001011003 \\ -35.70849137 & & 1 \end{bmatrix}$$

Nota.- Las formulas y ecuaciones matriciales se encuentran en las Págs. 137 - 138

Tenemos entonces que el portafolio de Tangencia estará compuesto por -7.17% (MINA), 2.7% (TELEFP), 22% (BACKUS & JOHNSTON),....etc.

Considerando la información anterior, procedemos a determinar la tasa de rendimiento esperada para el portafolio de tangencia, es decir

$$R_{pT} = X^T R_i$$

$$\begin{bmatrix} -0.071731159 & 0.027648628 & 0.220186186 & 0.048332404 & 0.222707455 & 0.009207391 \\ 0.144469412 & 0.506128355 & -0.105937667 & -0.001011003 \end{bmatrix} \times \begin{matrix} \text{Rendimiento} \\ 0.01038114 \\ 0.00586255 \\ 0.004345419 \\ 0.010267876 \\ 0.002076432 \\ 0.017235486 \\ 0.010349095 \\ 0.001415142 \\ 0.000276599 \\ 0.001819551 \end{matrix}$$

Tasa de rendimiento esperada para el portafolio de Tangencia

$$R_{pT} = 0.003671873$$

La Varianza de este portafolio es:

$$\sigma_{pt}^2 = W^T S W$$

$$\sigma_{pT}^2 = \begin{bmatrix} -0.071731159 & 0.027648628 & 0.220186186 & 0.048332404 & 0.222707455 & 0.009207391 \\ 0.144469412 & 0.506128355 & -0.105937667 & -0.001011003 \end{bmatrix} \times$$

Matriz Varianza - Covarianza

0.003153981	-0.00014653	0.000305207	-8.5202E-05	8.04308E-05	-0.000207498	0.003077742	1.64244E-05	-0.000152094	0.000291567
-0.00014653	0.013108017	-0.000162991	0.000103131	-0.000136224	0.000492124	-5.63093E-05	0.000288524	-0.000276444	-0.000109383
0.000305207	-0.000162991	0.001876879	0.000103356	-0.000148846	0.000672822	0.000288416	6.67804E-05	-7.76241E-06	0.000331229
-8.5202E-05	0.000103131	0.000103356	0.0003361087	0.000229891	0.000561212	-4.40953E-05	0.000132667	-0.00017979	0.000834814
8.04308E-05	0.000103356	-0.000148846	0.000229891	0.001777549	0.000195145	6.055E-05	9.44398E-05	0.000345857	0.00064728
-0.000207498	0.000492124	0.000672822	0.000561212	0.000195145	0.013838891	-9.52649E-05	-0.000573626	3.4204E-05	0.000342741
0.003077742	-5.63093E-05	0.000288416	-4.40953E-05	6.055E-05	-9.52649E-05	0.003092057	6.10442E-06	-0.00014647	0.000284157
1.64244E-05	0.000288524	6.67804E-05	0.000132667	9.44398E-05	-0.000573626	6.10442E-06	0.000955978	-3.53448E-05	0.000474475
-0.000152094	-0.000276444	-7.76241E-06	-0.00017979	0.000345857	3.4204E-05	-0.00014647	-3.53448E-05	0.002470891	1.27128E-05
0.000291567	-0.000109383	0.000331229	0.000834814	0.00064728	0.000342741	0.000284157	0.000474475	1.27128E-05	0.011271404

Continuando con el desarrollo del problema

$$= \begin{bmatrix} (0.000317566) & (0.000536867) & (0.000440859) & (0.000329515) & (0.000385724) & (6.65806E-05) \\ (0.000316682) & (0.00053166) & (-0.000230615) & (0.000505107) & \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$\sigma_{pt}^2 = 0.000530338$
 $\sigma_{pt} = 0.02302906$
 (desviación estándar del portafolio de tangencia)

\Rightarrow

$\begin{bmatrix} -0.071731159 \\ 0.027648628 \\ 0.220186186 \\ 0.048332404 \\ 0.222707455 \\ 00.506128355. \\ 144469412 \\ 0.009207391 \\ 0.105937667 \\ 0.001011003 \\ 1.0000000 \end{bmatrix}$

Aquí se cumple la condición
Del modelo QP – Media Varianza $\sum X_i = 1$

Similar caso ocurre con la revisión de los portafolios con un activo libre de riesgo del 5.65%. Empleando la metodología anterior, resulta los datos que siguen.

$R_{pt} = w^T R_i = 0.005072133$

Tasa de rendimiento esperada para el portafolio de tangencia:

$\sigma_{pt}^2 = W^T S . W = 0.0007309691$

$\sigma_{pt} = 0.02703644$

Resumiendo las distintas tasas de rendimientos, expondremos rendimiento y riesgos diversos.

Tabla No. 21- Resumen de oportunidades de Inversión con tasas libres de riesgo

Tasa libre de Riesgo	RENDIMIENTO	VARIANZA	RIESGO
0.00%	0.008454385	0.001444632	0.038008312
1.0%	0.001383928	0.000734477	0.02710123
2.0%	0.003671873	0.000530338	0.02302906
3.0%	0.004275351	0.0005446059	0.023336794
4.00%	0.004630227	0.0006078740	0.024655101
5.0%	0.004908184	0.000677102	0.026021182
5.65%	0.005072133	0.0007309691	0.02703644

Fuente: Elaboración propia

Nota. La formula se encuentra en la Pág. 115 – portafolio de tangencia

La pendiente de la línea CML (línea de mercado de capitales) =

$\ln(1.02)/52 = 0.00038082$ (tasa libre de riesgo proporcional debido al promedio semanal estimado para los precios y cotizaciones formuladas para la investigación- Bolsa de Valores de Lima)

$$m = \frac{\overline{E_p} - R_f}{\sigma_p}$$

$$m = \frac{0.0036371873 - 0.00038082}{0.02302906} = 0.14140253$$

La ecuación de la recta que describe a la CML (o la nueva frontera eficiente)

$$E(R_p) = R_f + m \cdot \sigma_p = 0.00038082 + 0.14140253 \sigma_p$$

Con la información obtenida, encontramos la curva de varianza mínima, según aparece en la siguiente tabla. En ella incorporamos un activo libre de riesgo, con una tasa de rendimiento 1.02% y calculamos la *ecuación de la recta*:

$$R_{pT} = R_f + b \cdot \sigma_p = 0.00038082 + b (0.141400253)$$

Utilizando los valores listados en la tabla, tal que encontraremos el valor para **b**, que satisfaga que la ecuación de la recta sea tangente al conjunto de portafolios eficientes. El valor de *b* es el *Máximo Índice de Sharpe*, calculado con la fórmula que sigue:

$$\text{Índice de Sharpe} = b = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

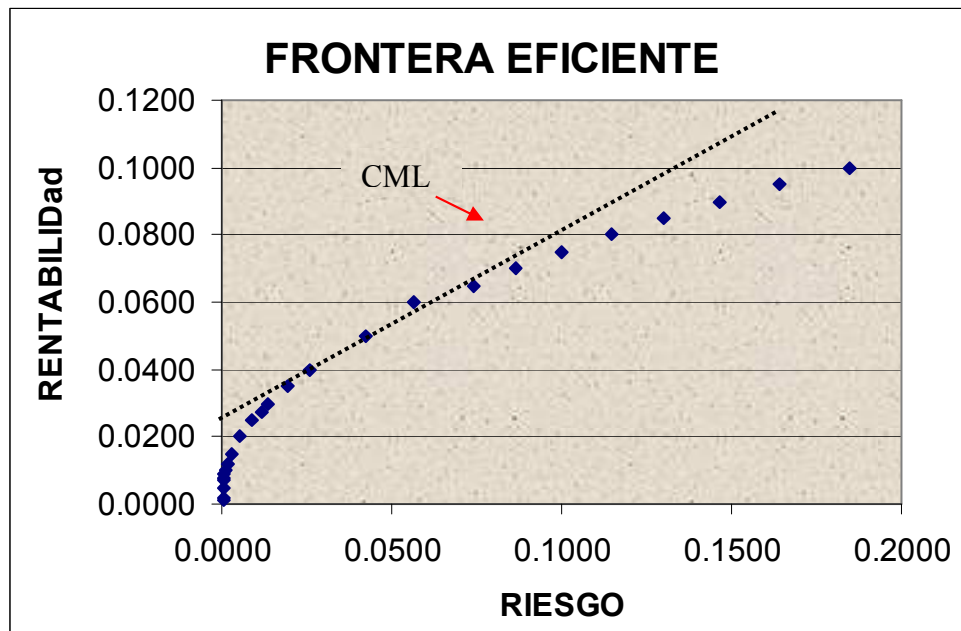
$$b = \frac{0.0036371873 - 0.00038082}{0.02302906} = 0.141402528$$

Tabla No. 22.- Calculo del índice de Sharpe (método **Capital Asset Pricing Model** CAPM)

Rendimiento	Desv. Estándar	E(rp)	I.Sharpe
0.008454385	0.04000	0.006036921	0.14140253
0.008454385	0.038008312	0.005755292	0.14140253
0.001383928	0.02710123	0.004213003	0.14140253
0.003671873	0.02302906	0.003637187	0.14140253
0.004275351	0.023336794	0.003680702	0.14140253
0.004630227	0.024655101	0.003867114	0.14140253
0.004908184	0.026021182	0.004060281	0.14140253
0.005072133	0.02703644	0.004203841	0.14140253
0.00515781	0.027623312	0.004286826	0.14140253
0.005278636	0.028510779	0.004412316	0.14140253
0.005398842	0.029456885	0.004546098	0.14140253
0.005519493	0.03046308	0.004688377	0.14140253
0.005641439	0.0315312	0.004839412	0.14140253
0.005891951	0.03386223	0.005169025	0.14140253
0.006155085	0.036471155	0.005537934	0.14140253

Fuente: Elaboración propia

La grafica No. 36 corresponde a la tabla. a los valores que caracterizan el portafolio de tangencia, así como a la CML (LINEA DE MERCADO DE CAPITAL)



Grafica No. 36 Frontera eficiente que caracteriza el portafolio de tangencia (CML)

En síntesis, podemos afirmar que todas las personas no poseen las mismas expectativas de inversión, por ello es de gran utilidad la frontera eficiente, ya que con ésta se selecciona la cartera óptima de inversión para cualquier tipo de inversionista. Lo único que se requiere es conocer las curvas de indiferencia (preferencias del inversionista) y ubicar cada una de ellas en la frontera, de allí seleccionar el portafolio que se ajuste mejor a los objetivos de inversión del inversionista.

De esta manera se presenta el cuadro resumen de los resultados obtenidos:

Tabla No. 23 - Rentabilidad, riesgo y posibilidad de pérdida de las acciones Seleccionadas

	MINA	TELP	B&J	CAA	EDEL	CAR
Rendimiento	2.013941137	1.137334743	0.843011217	1.991967961	0.402827846	3.34368423
Media Muestral	0.01038114	0.00586255	0.004345419	0.010267876	0.002076432	0.017235486
Varianza	0.00315398	0.01310802	0.00187688	0.003361087	0.001777755	0.013838891
Desviación estándar	0.056160313	0.11449025	0.04332296	0.057974878	0.04216099	0.117638817
Z (normalización)	-0.184848327	-0.051205672	-0.100302903	-0.177109059	-0.049250082	-0.146511893
Posibilidad de perdida	0.426674001	0.479580816	0.460051927	0.429711363	0.48036	0.441758651
%	42.66740009	47.9580816	46.00519265	42.97113632	48.03600002	44.17586511

	SOUP	LUZS	CEML	TUMA
Rendimiento	2.007724364	0.274537613	0.053660216	0.352992906
Media Muestral	0.010349095	0.001415142	0.000276599	0.001819551
Varianza	0.00309206	0.00095598	0.00247089	0.011271403
Desviación estándar	0.055606269	0.030918889	0.04970809	0.10616687
Z (normalización)	-0.186113811	-0.045769508	-0.005564468	-0.017138596
Posibilidad de perdida	0.426177756	0.481746981	0.49778011	0.493163024
%	42.61777556	48.17469813	49.77801101	49.31630243

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 23 se muestra que todas las acciones tienden a la rentabilidad, es decir las posibilidades de perdida son menores al 50% en todas las acciones. Según tabla 24, las acciones que presenta mayor rentabilidad esperada es Cartavio S.A. con una rentabilidad promedio semanal de 1.724%.

Se aprecia que la acción con más bajo riesgo es Luz del Sur con un valor de 3.0915%.

La acción con mayor posibilidad de pérdida es Cementos Lima ya que tiene el nivel de rentabilidad esperada de 0.247089% con un valor de posibilidad de pérdida de 49.7780%, seguida de Tumán Agro Industria con un porcentaje de 49.3163%.

La acción con menor posibilidad de pérdida es la de Southern Perú con un porcentaje de 42.6177%, seguida de Minera Atacocha con un porcentaje de 42.667%.(Tabla 23).

El estudio que se ha realizado permite afinar más la preselección de acciones y descartar aquellas que presentan una posición desventajosa en ambos sentidos: rentabilidad y riesgo

Tabla No. 24.- Máxima rentabilidad del portafolio

Empresas	Ponderación	RENTABILIDAD	VARIANZA	RIESGO
MINA	0	0.01038114	0.00315398	0.056160313
TELEP	0	0.00586255	0.01310802	0.11449025
B&J	0	0.004345419	0.00187688	0.04332296
CAA	0	0.010267876	0.003361087	0.057974878
EDEL	0	0.002076432	0.001777755	0.04216099
CAR	1	0.017235486	0.013838891	0.117638817
SOUP	0	0.010349095	0.00309206	0.055606269
LUZS	0	0.001415142	0.00095598	0.030918889
CEML	0	0.000276599	0.00247089	0.04970809
TUMA	0	0.001819551	0.011271403	0.10616687
	1	0.06402929	0.054906946	

PORTAFOLIO	
RENTABILIDAD	0.017235486
VARIANZA	0.013838891
RIESGO	0.117638817

Fuente: Elaboración propia

Si ahora consideramos el enfoque siguiente: tomando el mismo paquete de acciones .cuya meta es mostrar el máximo nivel de rentabilidad y el mínimo riesgo asumido, se muestra en la tabla No 24, donde se evidencia que el máximo rendimiento promedio corresponde a la empresa Cartavio S.A.con 1.7%, pero asociado a un riesgo elevado del 12%. En sentido contrario, se puede mostrar en la tabla No. 25 que el

riesgo del portafolio mínimo se espera en la cartera de Luz del Sur con 3.1%, aunque su retorno no esperado sea 0.14% dentro de la conformación del portafolio.

Se pretende demostrar a través del *Programa Premiun Solver Plataform-Excel*, que efectivamente al solucionar el modelo planteado, se aprecia tal situación tanto en, la *celda objetivo* (máximo) concerniente a la empresa Cartavio, como en la *celda objetivo* (mínimo) correspondiente a las acciones de Luz del Sur.

Por la Programación – Excel Solver

Microsoft Excel 11.0 Informe de respuestas

Hoja de cálculo: [Calculo de datos en Excel-IO.xls]Hoja3

Informe creado: 04/01/2007 08:31:59 a.m.

Celda objetivo (Máximo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$C\$33	RENTABILIDAD CAR	0.017235486	0.017235486

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$C\$20	MINA MINA	15	0
\$C\$21	TELEP MINA	4	0
\$C\$22	B&J MINA	4	0
\$C\$23	CAA MINA	15	0
\$C\$24	EDEL MINA	9	0
\$C\$25	CAR MINA	30	1
\$C\$26	SOUP MINA	15	0
\$C\$27	LUZS MINA	4	0
\$C\$28	CEML MINA	0	0
\$C\$29	TUMA MINA	4	0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
\$C\$30	MINA	1	\$C\$30=1	Opcional	0

Tabla No. 25.- Mínimo Riesgo de Portafolio

Empresas	Ponderación	RENTABILIDAD	VARIANZA	RIESGO
MINA	0	0.01038114	0.00315398	0.056160313
TELEP	0	0.00586255	0.01310802	0.11449025
B&J	0	0.004345419	0.00187688	0.04332296
CAA	0	0.010267876	0.003361087	0.057974878
EDEL	0	0.002076432	0.001777755	0.04216099
CAR	0	0.017235486	0.013838891	0.117638817
SOUP	0	0.010349095	0.00309206	0.055606269
LUZS	1	0.001415142	0.00095598	0.030918889
CEML	0	0.000276599	0.00247089	0.04970809
TUMA	0	0.001819551	0.011271403	0.10616687
	1	0.06402929	0.054906946	
PORTAFOLIO				
RENTABILIDAD	0.001415142			
VARIANZA	0.00095598			
RIESGO	0.030918889			

Fuente: Elaboración propia

Usando el programa Premiun Solver Plataform – Excel, los resultados son los siguientes:

Mínimo riesgo del portafolio:

Microsoft Excel 11.0 Informe de respuestas

Hoja de cálculo: [CAPITULO 5 TESIS I.O.xls]Hoja2

Informe creado: 04/01/2007 03:06:37 p.m.

Celda objetivo (Mínimo)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
	RIESGO LUZS		
\$B\$107	Ponderación	0.03091889	0.03091889

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
\$B\$92	MINA Ponderación	10	0
\$B\$93	TELEP Ponderación	4	0
\$B\$94	B&J Ponderación	10	0
\$B\$95	CAA Ponderación	10	0
\$B\$96	EDEL Ponderación	10	0
\$B\$97	CAR Ponderación	2	0
\$B\$98	SOUP Ponderación	10	0
\$B\$99	LUZS Ponderación	30	1
\$B\$100	CEML Ponderación	10	0
\$B\$101	TUMA Ponderación	4	0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
\$B\$102	Ponderación	1	\$B\$102=1	Opcional	0

Comprobado a través del procedimiento analítico y matricial, en un ambiente donde es posible admitir la existencia de un activo libre de riesgo, el inversionista podrá seleccionar parte de su cartera en un conjunto de activos riesgosos y el activo libre de riesgo, luego, la restricción presupuestaria está dada por la línea que parte desde el nivel de rendimiento del activo libre de riesgo y es tangente a la frontera eficiente, lo que significa que el inversor puede ahora maximizar su utilidad sujeto a una restricción más amplia, lo cual permite aumentar su satisfacción, independientemente de cuáles sean sus preferencias ante el riesgo.

Continuando el estudio, ahora formularemos el modelo de programación cuadrática, con el propósito de optimizar la función objetivo minimizando el riesgo. Para ello, vamos a utilizar los programas computacionales WINQSB y LINGO. El objetivo, consiste en determinar para un inversionista adverso al riesgo, en qué proporción de sus inversiones la minimización de la función objetivo alcanza su valor óptimo.

Empleando la metodología propuesta, se procede a formular el Modelo de Programación Cuadrática, utilizando el MÉTODO MEDIA- VARIANZA DE MARKOWITZ, mediante el enfoque de la programación no lineal (Pág.146) La perspectiva de la cartera establece una relación fundamental, que está compuesta por información bursátil obtenido de la Bolsa de Valores de Lima y CONASEV, y proceso de cálculo obtenidos empleando las Varianza, covarianzas, rendimiento.

Cabe mencionar que el modelo resulta algo complicado de resolver cuando no se permite ventas en corto. En este caso, las pruebas que se han efectuado revelan, que la única alternativa es utilizar el *algoritmo de programación cuadrática*.

El inversionista vende un valor y luego lo compra de nuevo. Las ventas en corto se realizan pidiendo prestado certificado de acciones para utilizarlos en la negociación inicial y luego rembolsando el préstamo con certificado obtenido en una transacción posterior. Las ventas en corto contribuyen a estabilizar los precios, porque implican una operación inversa a la tendencia del mercado. Si la tendencia de los precios es a la baja, aquellos que vendieron en corto a un precio mayor, podrán generar una utilidad al recomprar los títulos. Esto incrementará la demanda de los mismos; si la tendencia de los precios es a la alza, la venta en corto producirá el efecto contrario.

$$\begin{aligned}
Min Z = & 0.0031539_{MINA}X_1^2 + 0.01310802_{TELE}X_2^2 + 0.00187688_B \& J X_3^2 + 0.003361087_{CAA}X_4^2 + \\
& 0.00177775_{EDEL}X_5^2 + 0.013838891_{CAR}X_6^2 + 0.00309206_{SOUP}X_7^2 + 0.00095598_{LUZS}X_8^2 + \\
& 0.00247089_{CEML}X_9^2 + 0.011271403_{TUMA}X_{10}^2 \\
& + 2*(-0.00014653X_1X_2 + 0.000305207X_1X_3 - 8.5202E-05X_1X_4 + 8.04308E-05X_1X_5 \\
& - 0.000207498X_1X_6 + 0.003077742X_1X_7 + 1.64244E-05X_1X_8 - 0.000152094X_1X_9 + 0.000291567X_1X_{10} - 0.000162991X_2X_3 \\
& + 0.000103131X_2X_4 - 0.000136224X_2X_5 + 0.000492124X_2X_6 - 5.63093E-05X_2X_7 + 0.000288524X_2X_8 - 0.000276444X_2X_9 \\
& - 0.000109383X_2X_{10} + 0.000103356X_3X_4 - 0.000148846X_3X_5 + 0.000672822X_3X_6 + 0.000288416X_3X_7 + 6.67804E-05X_3X_8 \\
& - 7.76241E-06X_3X_9 + 0.000331229X_3X_{10} + 0.000229891X_4X_5 + 0.000561212X_4X_6 - 4.40953E-05X_4X_7 + 0.000132667X_4X_8 \\
& - 0.00017979X_4X_9 + 0.000834814X_4X_{10} + 0.000195145X_5X_6 + 6.055E-05X_5X_7 + 9.44398E-05X_5X_8 + 0.000345857X_5X_9 \\
& + 0.00064728X_5X_{10} + -9.52649E-05X_6X_7 - 0.000573626X_6X_8 + 3.4204E-05X_6X_9 + 0.000342741X_6X_{10} + 6.10442E-06X_7X_8 \\
& - 0.00014647X_7X_9 + 0.000284157X_7X_{10} - 3.53448E-05X_8X_9 + 0.000474475X_8X_{10} + 1.27128E-05X_9X_{10})
\end{aligned}$$

Sujeto a :

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} = 1$$

$$\begin{aligned}
& 0.01038114_{MINA}X_1 + 0.00586255_{TELEP}X_2 + 0.004345419_B \& J X_3 + 0.010267876_{CAA}X_4 + 0.002076432_{EDEL}X_5 + 0.017235486_{CAR}X_6 \\
& + 0.010349095_{SOUP}X_7 + 0.001415142_{LUZS}X_8 + 0.000276599_{CEML}X_9 + 0.001819551_{TUMA}X_{10} = 0.015
\end{aligned}$$

$$X_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, 10$$

NOTA.- Para el desarrollo de este modelo propuesto se ha empleando dos condiciones: 1) una tasa de rendimiento esperado del 1.5%, y 2) ponderaciones a ese nivel de riesgo, según el cuadro que sigue:

Mina	Telef.	B&J	CAA	EDEL	CAR	SOUP	LUZS	CEML	TUMA
0	0	20	0	20	0	0	60	0	0

Empleando el **Programa WINQSB: Quadratic and Integer Quadratic Programing (QP)** -

Tabla 26. Compilación del modelo: varianzas, covarianzas y parámetros de optimización

Quadratic and Integer Quadratic Programming													
File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help													
MINIMIZAR EL RIESGO													
X7 Soup : X1Mina													
Variable -->	X1Mina	X2 Telef	X3 B&J	X4 CAA	X5 Edel	X6 CAR	X7 Soup	X8 Luzs	X9 CemL				
Minimize	0	0	20	0	20	0	0	60	0				
X1Mina *	0.3153981	-0.029306	0.0610404	-0.0170404	0.01608615	-0.0414996	0.6155484	0.00328487	-0.0304188				
X2 Telef *		1.3108017	-0.032598	0.0206262	-0.0272448	0.0984248	-0.011262	0.057705	-0.055289				
X3 B&J *			0.1876879	0.0206712	-0.0297692	0.1345644	0.0576832	0.01336	-0.001552				
X4 CAA *				0.3361087	0.0459782	0.1122424	-0.00882	0.026533	-0.035958				
X5 Edel *					0.1777549	0.039029	0.01211	0.01888	0.0691714				
X6 CAR *						1.3838891	-0.01905	-0.1147252	0.006841				
X7 Soup *							0.3092057	0.0012208	-0.029294				
X8 Luzs *								0.0955978	-0.007068				
X9 CemL *									0.2470891				
X10 Tuma *													
C1Inversión	1	1	1	1	1	1	1	1	1				
C2 Ganancia	1.038114	0.586255	0.4345419	1.0267876	0.2076432	1.7235486	1.0349095	0.1415142	0.0276599				
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M	M	M				
Variable Type	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous				

QPIOP

continúa tabla 26.

Quadratic and Integer Quadratic Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

MINIMIZAR EL RIESGO

X7 Soup * : X1Mina

Variable -->	X4 CAA	X5 Edel	X6 CAR	X7 Soup	X8 Luzs	X9 CemL	X10 Tuma	Direction	R. H. S.
Minimize	0	20	0	0	60	0	0		
X1Mina *	-0.0170404	0.01608615	-0.0414996	0.6155484	0.00328487	-0.0304188	0.0583134		
X2 Telef *	0.0206262	-0.0272448	0.0984248	-0.011262	0.057705	-0.055289	-0.0218766		
X3 B&J *	0.0206712	-0.0297692	0.1345644	0.0576832	0.01336	-0.001552	0.066246		
X4 CAA *	0.3361087	0.0459782	0.1122424	-0.00882	0.026533	-0.035958	0.166963		
X5 Edel *		0.1777549	0.039029	0.01211	0.01888	0.0691714	0.129456		
X6 CAR *			1.3838891	-0.01905	-0.1147252	0.006841	0.068548		
X7 Soup *				0.3092057	0.0012208	-0.029294	0.056831		
X8 Luzs *					0.0955978	-0.007068	0.094895		
X9 CemL *						0.2470891	0.00254		
X10 Tuma *							1.1271404		
C1Inversión	1	1	1	1	1	1	1	=	1
C2 Ganancia	1.0267876	0.2076432	1.7235486	1.0349095	0.1415142	0.0276599	0.1819551	>=	1.5
LowerBound	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M	M		
Variable Type	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous	Continuous		

Inicio Proyecto de tesis M... Graphics Server Quadratic and Integ... 06:32 p.m.

Tabla 27. Resultados de la optimización de los portafolios según los niveles de inversión

Quadratic and Integer Quadratic Programming									
File Format Results Utilities Window Help									
0.00									
Combined Report for MINIMIZAR EL RIESGO									
18:33:03									
Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	April Total Contribution	08 Dual Slack	2007 Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)		
1 X1Mina	0.27	0	0	0	basic	-0.08	0.02		
2 X2 Telef	0	0	0	1.06	at bound	-1.06	M		
3 X3 B&J	0	20.00	0	21.49	at bound	-1.49	M		
4 X4 CAA	0.06	0	0	0	basic	-0.36	0.08		
5 X5 Edel	0	20.00	0	21.98	at bound	-1.98	M		
6 X6 CAR	0.67	0	0	0	basic	-1.64	4.84		
7 X7 Soup	0	0	0	0.02	at bound	-0.02	M		
8 X8 Luzs	0	60.00	0	62.04	at bound	-2.04	M		
9 X9 CemL	0	0	0	2.40	at bound	-2.40	M		
10 X10 Tuma	0	0	0	2.09	at bound	-2.09	M		
11 X1Mina	* X1Mina	0.32	0.02						
12 X1Mina	* X2 Telef	-0.03	0						
13 X1Mina	* X3 B&J	0.06	0						
14 X1Mina	* X4 CAA	-0.02	0.00						
15 X1Mina	* X5 Edel	0.02	0						
16 X1Mina	* X6 CAR	-0.04	-0.01						
17 X1Mina	* X7 Soup	0.62	0						
18 X1Mina	* X8 Luzs	0.00	0						
19 X1Mina	* X9 CemL	-0.03	0						
20 X1Mina	* X10 Tuma	0.06	0						
21 X2 Telef	* X2 Telef	1.31	0						
22 X2 Telef	* X3 B&J	-0.03	0						

Inicio

Proyecto de tesis M...

Graphics Server

Quadratic and Integ...

06:33 p.m.

continua. Tabla No. 27

Quadratic and Integer Quadratic Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for MINIMIZAR EL RIESGO

	18:33:03	Sunday	April	08	2007
48	X5 Edel	* X8 Luzs	0.02	0	
49	X5 Edel	* X9 CemL	0.07	0	
50	X5 Edel	* X10 Tuma	0.13	0	
51	X6 CAR	* X6 CAR	1.38	0.63	
52	X6 CAR	* X7 Soup	-0.02	0	
53	X6 CAR	* X8 Luzs	-0.11	0	
54	X6 CAR	* X9 CemL	0.01	0	
55	X6 CAR	* X10 Tuma	0.07	0	
56	X7 Soup	* X7 Soup	0.31	0	
57	X7 Soup	* X8 Luzs	0.00	0	
58	X7 Soup	* X9 CemL	-0.03	0	
59	X7 Soup	* X10 Tuma	0.06	0	
60	X8 Luzs	* X8 Luzs	0.10	0	
61	X8 Luzs	* X9 CemL	-0.01	0	
62	X8 Luzs	* X10 Tuma	0.09	0	
63	X9 CemL	* X9 CemL	0.25	0	
64	X9 CemL	* X10 Tuma	0.00	0	
65	X10 Tuma	* X10 Tuma	1.13	0	
	Objective	Function	(Min.) =	0.65	
	Constraint	Left Hand Side	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
					Allowable Min. RHS
					Allowable Max. RHS
1	C1 Inversión	1.00	=	1.00	0
2	C2 Ganancia	1.50	>=	1.50	0
					2.47
					2.52
					1.00
					1.18
					1.27
					1.56

Proyecto de tesis M...

Graphics Server

Quadratic and Integ...

06:34 p.m.

Grafica No. 37. Solución grafica del punto optimo

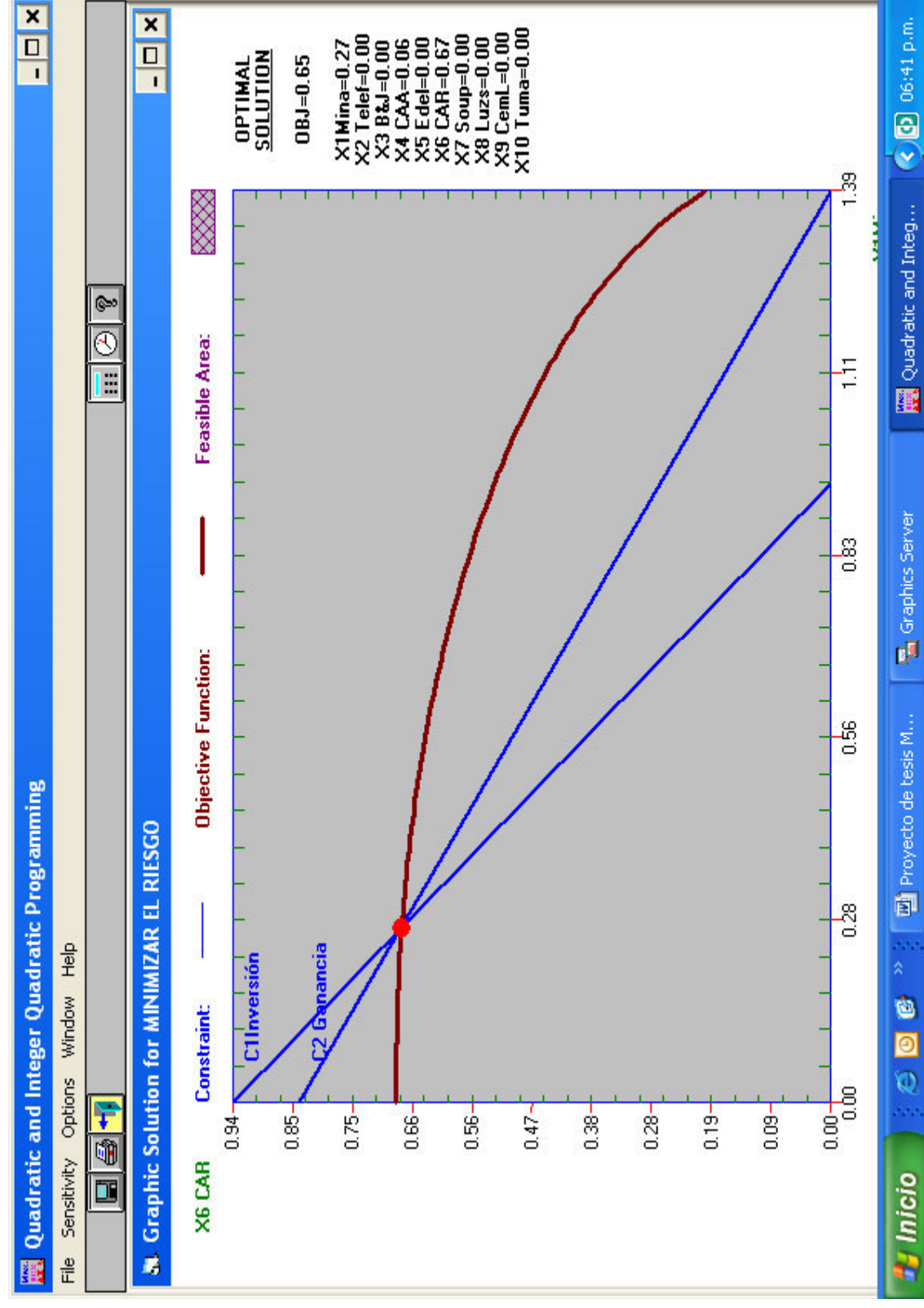


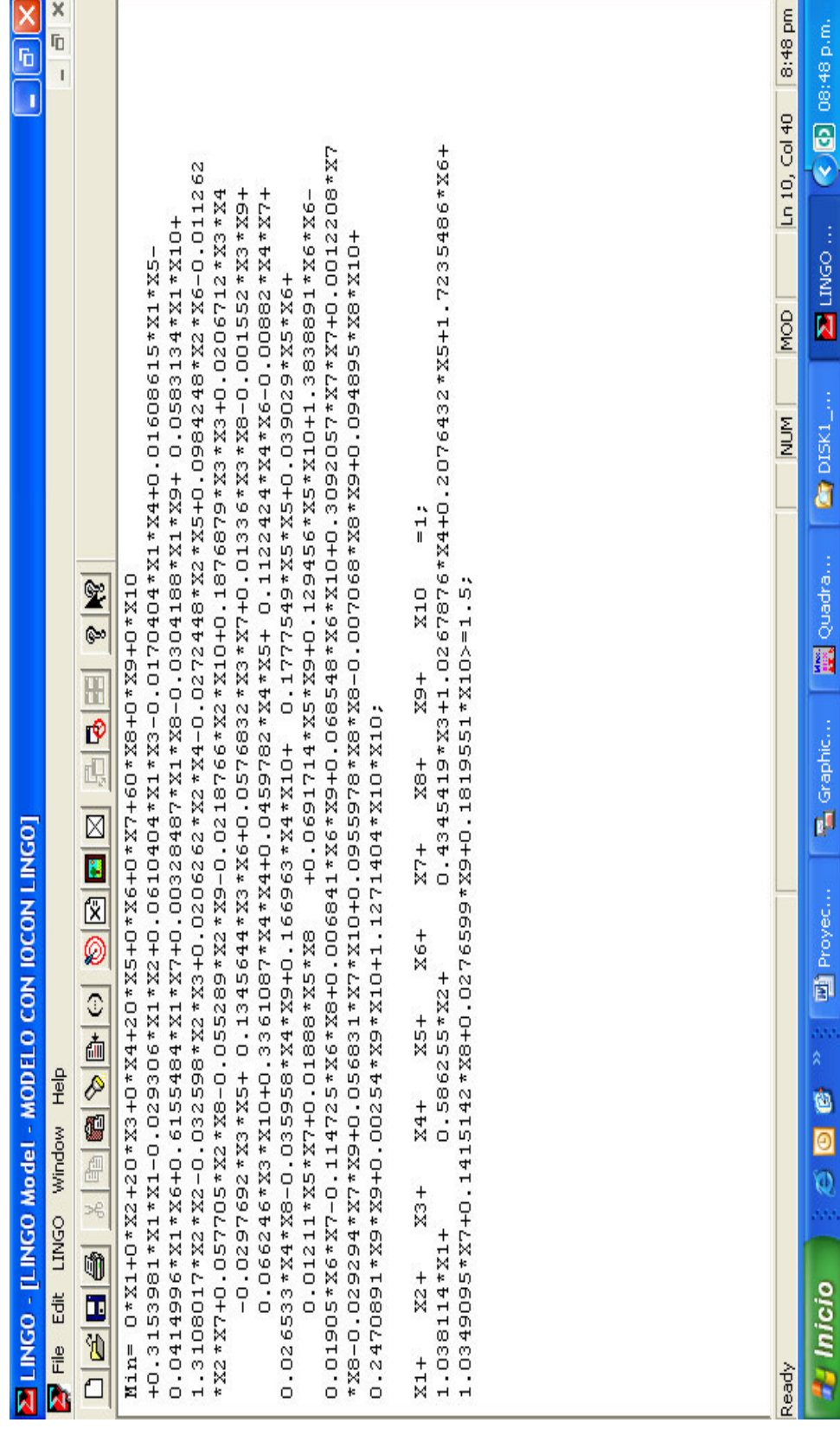
Tabla No. 28. Análisis Paramétrico para Minimizar el riesgo - Valor de la restricción en la solución óptima

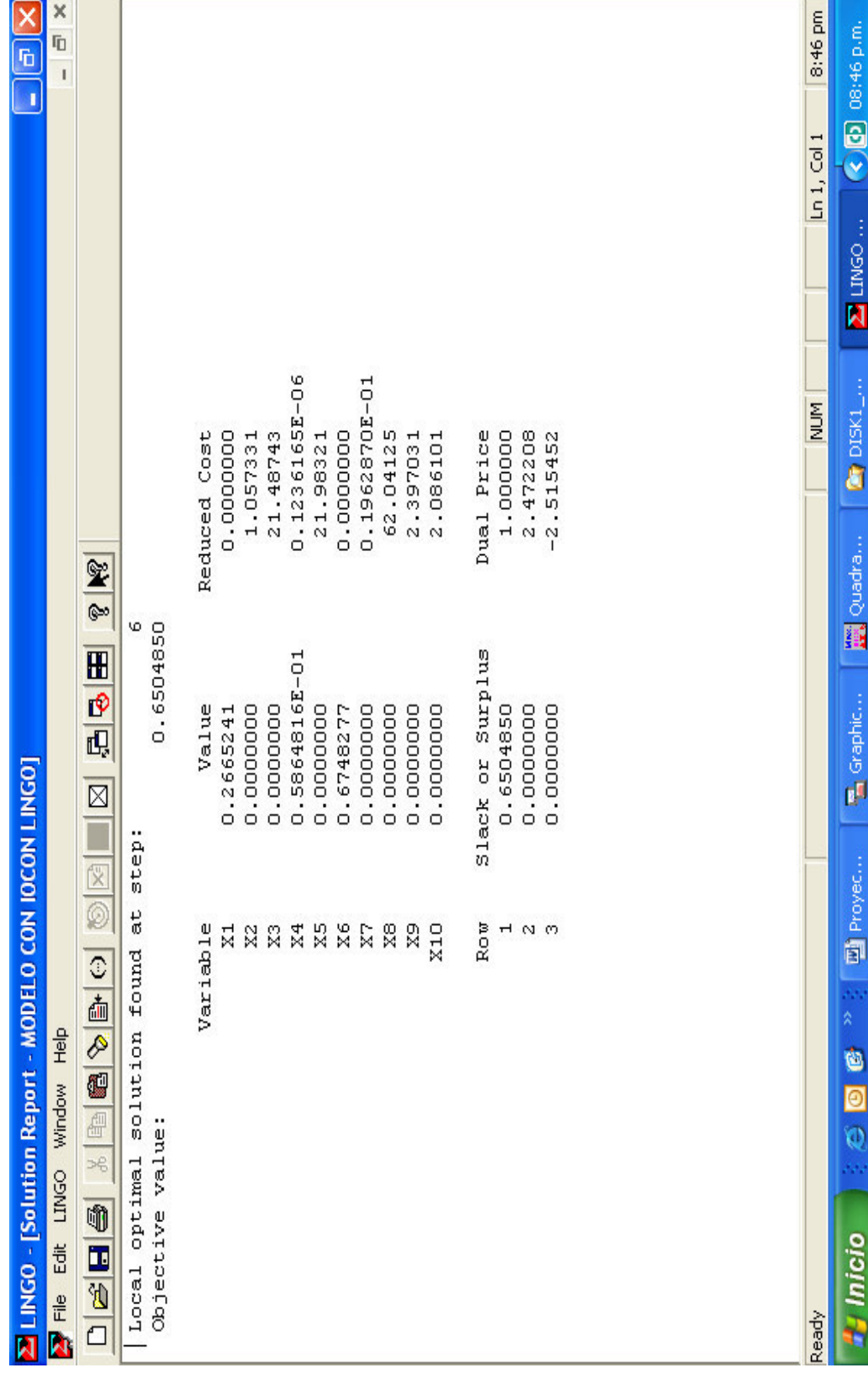
Quadratic and Integer Quadratic Programming					
File Format Results Utilities Window Help					
0.00					
Parametric Analysis for MINIMIZAR EL RIESGO -- Right-Hand-Side					
04-08-2007 19:44:30	Right-hand Side of C1Inversión	Objective Function Minimized Value	Objective Function Coefficient Matrix	Solution	
0	Original	0.65	Positive definite	Optimal	
1	-4.00		Positive definite	Infeasible	
2	-3.00		Positive definite	Infeasible	
3	-2.00		Positive definite	Infeasible	
4	-1.00		Positive definite	Infeasible	
5	0		Positive definite	Infeasible	
6	1.00	0.65	Positive definite	Optimal	
7	2.00	0.32	Positive definite	Optimal	
8	3.00	0.69	Positive definite	Optimal	
9	4.00	1.22	Positive definite	Optimal	
10	5.00	1.91	Positive definite	Optimal	
11	6.00	2.74	Positive definite	Optimal	

Grafica No. 38 - Valor óptimo de la función objetivo



Tabla No. 29 Modelo de Programación Cuadrática. (Programa LINGO)





Análisis e interpretación de resultados

En la sección correspondiente se estableció mediante el Método Media-Varianza, la composición del portafolio eficiente. Por lo que el análisis e interpretación que se presenta se efectúa tomando como base sus resultados.

1. De acuerdo a las condiciones del modelo de programación cuadrática, formulado para movimientos bursátiles de 10 activos, se ha considerado como restricciones estructurales una tasa de rendimiento esperado del 1.5% y una inversión ponderada del 100%, para activos cuyos niveles de riesgo son los más bajos, luego la composición del portafolio quedaría así : Backus & Johnston con el 20%, Edelnor 20% y Luz del Sur con 60% es decir, si por ejemplo se invierte S/. 1'000,000 se tendría 200,000 en B&J, 200,000 en Edelnor y 600,000 en Luz del Sur.
2. Aplicando la corrida del software WINQSB, la tabla No. 26 (Pág. 186) y su resultante indicada en la tabla 27 (Pág. 187), nos muestra los resultados de resolver el modelo anterior con una rentabilidad esperada de 1.5%. Se observa que lo óptimo es invertir el 27% en la empresa Minera Atacocha (MINA), 6% Corporación Aceros Arequipa (CAA) y el 67% Cartavio S.A (CAR), mientras que las demás empresas 0% debido a que presentan márgenes de riesgo muy altos, para obtener una rentabilidad del 1.5% y una varianza mínima de 0.65. El horizonte de planeación fue del 7 Febrero 2001 al 6 Junio 2006.
3. Al analizar la gráfica 37 (Pág. 190), es notable que el punto óptimo cuando el riesgo es 0.65 y la rentabilidad 1.5% que concentra el umbral de rentabilidad entre las inversiones y las ganancias esperadas, sea el más conveniente ya que los niveles de riesgo disminuyen, favoreciendo futuras inversiones.
4. Una vez calculada la proporción a invertir en cada activo, debido a las fluctuaciones del mercado, resta ahora presentar el *análisis paramétrico* que se define como el estudio de la sensibilidad de las variables de comportamiento. Así la tabla No. 28 (Pág. 191) describe las diversas alternativas por estimar respecto a la cantidad de dinero que podría obtener el inversor siguiendo

dicho portafolio, frente a los diversos niveles de riesgo. En cambio, para diversas capacidades de inversión, el comportamiento del riesgo es proporcional al mismo, es decir que el valor mínimo del riesgo se habrá alcanzado, si por ejemplo, para la primera alternativa, cuyo valor en la restricción de la solución óptima es 1, se obtendrá como función objetivo un mínimo riesgo de 0,65; en otras palabras, a mayor incremento de las inversiones en el mercado de valores, éstas arrojarán un alto riesgo. Para un valor de inversión de 3 se obtendrá como valor de riesgo 0.69, y para una inversión de 6 su valor de riesgo en la función objetivo será 2.74. Los efectos de estos desniveles de inversión y riesgo se muestran en la gráfica No. 38. (Pág. 192) valor óptimo de la función objetivo.

5. Analizando comparativamente los niveles de solución óptima y riesgo, se ha aplicado el software LINGO, cuyos resultados y características son similares, como se observa en las tablas 29 (Pág. 193) y 30 (Pág. 194) respectivamente.
6. Se está demostrando en esta investigación que el modelo de Markowitz es ideal para las inversiones y lo suficientemente aplicable a problemas de mercado de valores, como mecanismo para determinar la solución óptima del precio de las acciones.
7. Con este análisis podemos concluir que el modelo media - varianza utilizado es muy sensible al número de observaciones a emplear y que para obtener una buena alternativa de inversión es recomendable una cartera muy diversificada.
8. Por lo tanto la hipótesis planteada resulta ser muy prometedora para resolver problemas de carteras de inversión.

5.5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El objetivo de nuestro estudio es determinar una metodología de valoración de empresas, sobre la base de la información suministrada, que nos permite identificar cuáles son los factores que más afectan a la valoración bursátil de las empresas, y una vez que se haya determinando estos factores, desarrollar el modelo que nos permita calcular el valor teórico de las empresas peruanas que cotizan en la bolsa

Después de recolectar, procesar y analizar toda la información necesaria para el desarrollo de nuestro estudio, estamos en condiciones de obtener las principales conclusiones sobre la eficiencia en la gestión de la cartera de inversiones, realizada para cada empresa accionaria a través de todo su período considerado en el estudio. Es importante señalar que gracias a este trabajo se ha logrado conocer más acerca de la evaluación de las carteras de inversión en el mercado peruano, como también concluir que los inversionistas se encuentran predispuestos de afrontar los niveles de riesgo para optimizar sus carteras de inversión. Se conviene en concluir lo siguiente:

- 1º Se ha determinado un modelo de valoración bursátil de las empresas que cotizan en la Bolsa de Valores de Lima altamente eficiente.
- 2º. La Teoría moderna de carteras de Harry Markowitz demuestra que toda la información necesaria para elegir la mejor cartera a un nivel de riesgo determinado depende de tres valores: rendimiento esperado de la inversión; Distribución normal (del rendimiento esperado); y correlaciones (de los activos contenidos a la cartera).
- 3º. Se sintetiza los resultados alcanzados en nuestra investigación, tomando en cuenta las condiciones para cada una de las hipótesis planteadas, y se presenta una visión de conjunto acerca del modelo de programación cuadrática empleado, dando énfasis al método media – varianza de Markowitz.

- 4°. El mercado público de valores peruano mostró señales positivas en el 2005, reflejando el interés de empresas e inversionistas en participar en dicho mercado como alternativa de financiamiento e inversión. En este sentido, la estabilidad macroeconómica, así como las expectativas de crecimiento de las empresas y la mayor confianza de los inversionistas han permitido que el 2005 sea un año de fortalecimiento del Mercado de Valores.
- 5°. Como se sabe, la Bolsa de Valores de Lima registró el mayor crecimiento durante los periodos 2001-2006 tendencia seguida por el Mercado de Valores Peruano, aunque sus rendimientos positivos fueron en algunos casos inferiores. De acuerdo a esta investigación se debe al control cambiario existente en el país, ya que las personas y empresas ven a la bolsa como una de las vías para poder acceder a las divisas. Todo lo anterior explica en gran medida las diferencias existentes entre las carteras del año 2001 al 2006. Los rendimientos esperados para las primeras, se encuentran acotados entre 0.2% y 1.7% (Tabla No. 16 Pág.162). De acuerdo a los resultados arrojados para el año 2006 (sin la presencia del activo libre de riesgo), los mejores portafolios son los conformados por las acciones que componen el 0.4%. Estos portafolios ofrecen para cualquier rendimiento el menor riesgo, en 1.8% en el mercado de valores. Con la misma información, el activo bolsa (considerando un activo libre de riesgo) presenta un retorno promedio de 0.5%, el cual fue calculado usando el 1.9% de su volatilidad (riesgo) para el período de planeamiento: 07 de febrero de 2001 al 01 de junio del 2006.(Tabla No. 20 Pág.170)
- 6°. Los portafolios generados son una buena inversión para cualquier tipo de inversionista, ya sea adverso, moderado o propenso del riesgo. Sin embargo, para un inversionista que conozca el mercado nacional, éste preferiría que sus carteras estuvieran conformadas sólo por las acciones que componen el IGBVL, ya que el Índice Bursátil de Lima, lo conforman los 34 títulos de mayor capitalización y mayor liquidez en el mercado accionario limeño. Como consecuencia de los resultados obtenidos, podemos afirmar que la relación de activos comprometidos en este estudio ofrecen para cada una de las ganancias objetivo el menor riesgo, como son los casos: rentabilidad CAR

(CARTAVIO SA) con 1.7% con un riesgo ponderables de 11.7%, mientras que la empresa LUZ DEL SUR 0.014% con riesgo ponderable de 0.3% (Tabla No. 25. Pag. 182).

7°. Siguiendo esta misma línea de trabajo, se ha empleado tasas libres de riesgo, de las que podemos, establecer diversas oportunidades de inversión, que ha servido para construir los portafolios de varianza mínima, para diferentes niveles de riesgo. Para nuestro caso particular se ha logrando obtener como alternativa una ecuación de la recta de $0.00038082 + 0.14140253 \sigma_p$, es decir, se ha podido experimentar lo definido por Harry Markowitz, que a mayor rendimiento o ganancia esperada, mayor es el nivel de riesgo que se debe asumir.

8°. Al analizar la gráfica 34, (Pág., No. 153) es notable que el octavo punto (LUZ DEL SUR) cuando el riesgo es 3% y la rentabilidad es 0.14%, es el mas conveniente en este caso, en relación al 3ro y 5to punto (BACKUS & JOHNSTON, EDELNOR), cuyos rendimientos en comparación al anterior fluctúa en nivel de riesgo: 4%, mientras que en rentabilidad 0.43% (Bakus & Jonson) y 0.21% a Edelnor. Sin embargo, la proporción del riesgo crece pero en menor cuantía que el riesgo. La composición del portafolio quedaría entonces: 60% a Luz del Sur y 20 % a Backus & Johnston y 20% Edelnor, es decir si se invierte por ejemplo: 1millon de soles, se tendría 600,000 en LUZS, 200,000 en B&J y 200,000 en EDEL. Cuando se busca mínimo riesgo sin tener en cuenta el nivel de rentabilidad, la composición del portafolio se concentra en las acciones: LUZS, EDELN, B&J, MINA, CEML, SOUP, CAA, TELEF, TUMAN y CAR. En la medida en que se va buscando maximizar la rentabilidad, así se tenga que incurrir en un mayor riesgo el portafolio se concentra en solo tres acciones: con 20%, 30% % y 55% respectivamente.

9°. Se ha demostrado que esta cartera satisface los siguientes requisitos:

- (a) **Eficiencia**, en el sentido de que minimiza el riesgo (en términos de volatilidad o Varianza) para el conjunto de todos aquellos portafolios con iguales expectativas de rentabilidad.
- (b) **Optimalidad**, en el sentido de satisfacer las aspiraciones de un inversor

estándar con estrategia “comprar y mantener”, ya que se aproxima suficientemente a la cartera de máxima utilidad para inversores sin sesgos particulares hacia la rentabilidad o la seguridad.

- 10°. Podemos preguntarnos hasta qué punto el inversor hubiera acertado comprando una cartera IBVL como la anteriormente seleccionada, y manteniéndola durante el año 2005. Un juicio a este respecto podría basarse ya en un análisis de Performance mediante Índice Sharpe o análogos, suponiendo que el inversor hubiera elegido un fondo de inversión.
11. Las reformas del Mercado de Valores realizadas por los gobiernos de turno de los últimos 8 años, sin duda incrementaron su desarrollo y ventajas para los inversionistas aunque todavía es muy temprano para poder afirmar algo acerca de la eficiencia del mercado de valores. No obstante en los últimos años, el control y regulación de las instituciones como CONASEV, BOLSA VALORES, y compañías evaluadoras de riesgo, ha permitido reflejar un aumento en la capitalización bursátil y los grandes niveles de negociación y transacción, lo que a su vez, ha propiciado la valoración notoria de los precios de las acciones, y una mejoría importante del desempeño de las carteras o portafolios de inversión en los últimos años.
- 12°. Se encontró que la mayoría de las acciones muestran rentabilidades promedio positivas y/o inferiores a la tasa libre de riesgo.
- 13°. Los portafolios óptimos contruidos a través del modelo de Markowitz (método de media varianza) tienen una alta concentración en pocas acciones.
- 14°. La mayor diversificación presentada en el último período, se puede explicar por las mejores expectativas que muestra el Mercado de Valores Peruano, ya que la mayoría de las acciones incluidas en este portafolio del periodo 2005-2006 , presenta una rentabilidad promedio semanal positiva.(Tabla No. 16, Pág. 162)
- 15°. La tasa libre de riesgo, utilizada para elaborar el portafolio óptimo según los

datos utilizados, fue la más baja de todos los períodos de estudio. Esta tasa más baja, también contribuye a la mayor diversificación del portafolio en el último período. (Tabla No 21, Pág. 176).

- 16°. Al aplicar el modelo de portafolio óptimo (ósea de la tangente) para los periodos más cortos, los resultados fueron mejores que al aplicar el modelo para los periodos de tiempo más largos.
- 17°. A pesar de que el modelo de Markowitz[29] presenta ciertas desventajas, una de las causas radicaba en la complejidad matemática del modelo por ser este un modelo cuadrático, paramétrico y con un elevado número de estimaciones de rentabilidades esperadas, varianzas y covarianzas. Sin embargo, no deja de ser importante en la práctica por los administradores de portafolio en el Perú, por lo tanto su aplicación tiene desde nuestro punto de vista, un *enorme potencial* por su base teórica y analítica, que ha servido de base para los actuales investigadores del mercado financiero, pudiendo partir de ese caudal para desarrollar sus investigaciones a futuro.
- 18°. Además de las técnicas cuantitativas basadas en el cálculo de la varianza, matrices de covarianzas y de correlaciones ya tienen un mayor uso en el desarrollo del mercado de valores. Los inversionistas y las grandes empresas, tienen hoy en día departamentos de riesgo que se dedican a medir, evaluar y administrar los riesgos de portafolios de inversiones. Las clasificadoras de riesgo que a la fecha operan en el Perú son Apoyo & Asociados Internacionales S.A. Clasificadora de Riesgo, Clasificadora de Riesgo Pacific Credit Rating SAC, Class & Asociados S.A. Clasificadora de Riesgo, Equilibrium Clasificadora de Riesgo S.A.
- 19°. Como se puede observar en el presente estudio, la mayor parte de los modelos cuantitativos tiene un fuerte soporte estadístico y el manejo de las herramientas de la *Investigación de Operaciones*, que han contribuido no solamente a facilitar los cálculos operativos y en especial el manejo del modelo de programación cuadrática, de la cual hay poca literatura práctica sobre este importante modelo. En ese sentido, también permiten a los investigadores y a las

empresas administradoras de portafolio a tener una adecuada preparación técnica, y por supuesto, con un buen manejo de la teoría del portafolio para así poder aplicarla en forma correcta y adecuada en la práctica.

20°. Sin duda alguna, la mejor aplicación de los modelos de cartera óptimos de inversión (Markowitz, CAPM) en la práctica dependerá del mejor desarrollo del mercado de valores, y la regulación de sus normas para lograr la eficiencia del mercado de capitales peruanos.

En razón de lo anterior, se ha pretendido probar su aplicación, para la cual se ha corrido los software: Premium Solver Plataform, WINQSB y el programa LINGO, dando resultados alentadores para optimizar o minimizar los niveles de riesgo, siempre y cuando las estimaciones han sido las correctas tanto en el cálculo de los rendimientos esperados como los diversos tamaños de riesgo, asociados también a carteras con activos libre de riesgo. Todo esto ha conducido a presenciar los resultados expuestos, concluyéndose su práctica y el factible uso de la Investigación de Operaciones en la aplicación y valoración del modelo de Markowitz a fin obtener metas de estudio favorables, aunque en nuestro medio sean todavía muy escasos.

Finalmente, respecto a los resultados conseguidos por medio del modelo de cartera MARKOWITZ, para el caso del mercado de valores peruano y probablemente para otros países, no puede prescindirse su aplicación en el futuro, lo que permite como fundamento principal avalar la *hipótesis del estudio*.

RECOMENDACIONES

La teoría moderna de portafolio en su amplio campo académico y práctico, permite realizar y profundizar temas de investigación importante, tales como:

1. Aplicar el modelo de la cartera óptima para otro tipo de inversiones como por ejemplo: bonos, acciones preferentes.
2. Emplear el modelo de cartera óptima (método media - varianza) como un instrumento para determinar la optimalidad de las acciones riesgosas. Sin embargo a pesar de que su aplicación es muy laboriosa sobre todo al calcular

las matrices varianza – covarianza, se convierte en una tarea casi imposible sobre todo cuando se maneja un número grande de acciones, por lo que puede utilizarse el cálculo del Índice de Sharpe en el que se involucra la relación entre los excesos del rendimiento de una acción y su Beta, o la medida de Treynor, que utiliza el mismo enfoque, pero en vez de emplear el riesgo total, maneja el riesgo no sistemático o el β del portafolio.

3. Se sugiere utilizar el modelo de portafolio, empleando los indicadores que relacionan la ganancia esperada en términos reales, es decir descontándose una tasa libre de riesgo, como su Beta estimada (o Índice de Sharpe, refiriéndose al riesgo sistemático) o con la desviación estándar estimada, como la medida de riesgo total de un activo.
4. Se propone la siguiente fórmula para el cálculo de la Matriz Inversa, la que podrá fácilmente ser manejado empleando el Programa Excel, con el propósito de construir el Portafolio de Varianza Mínima y la Frontera Eficiente

$$| M_{Inv} | = K_p * (-H_r) + L_r \quad \text{donde } p > r$$

K_p = columna K pivote de la celda p

H_r = columna H anterior de la celda r

L_r = columna L posterior de la celda r

5. Se propone una *Metodología Objetiva* para diseñar el portafolio óptimo, utilizando la siguiente secuencia.

Paso 1. Se seleccionan las acciones según los sectores de interés o de mayor trascendencia económica.

Paso 2. Calcular los índices propuestos para cada acción de acuerdo al sector en estudio.

Paso 3. Seleccionar aquella cartera o portafolio con retornos máximos positivos dentro de cada sector.

Paso 4. Se asigna proporciones o cantidades iguales de inversión en cada una de ellas.

Paso 5. Es necesario revisar el estado inflacionario del periodo y su variabilidad.

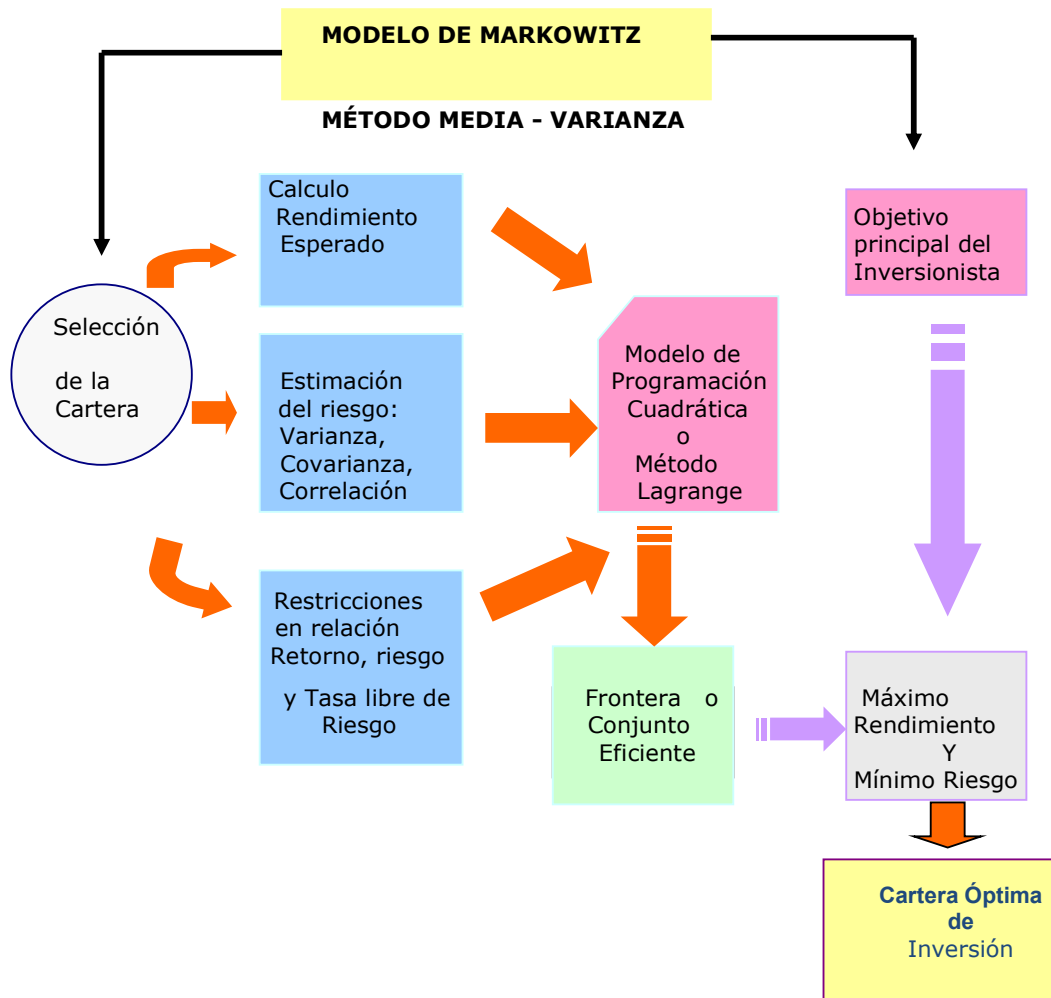
Paso 6. Obtener información financiera del movimiento bursátil nacional e

internacional para su comparación a fin de poder medir sus tendencias futuras, ella incluye políticas y regulaciones financieras.

Paso 7. Utilizar el procedimiento propuesto para la determinación de la cartera óptima de inversiones, lo que permitirá conseguir un portafolio con un rendimiento confiable y optimo que esté por encima de una tasa libre de riesgo, ante un nivel de riesgo esperado.

Para la aplicación del Modelo de Markowitz a través del proceso de Media-Varianza de los activos riesgosos, se propone el siguiente *ESQUEMA OPERATIVO Y SECUENCIAL* para optimizar carteras de inversión obteniendo como función objetivo la minimización del riesgo en términos de inversión (o porcentual), sujetas a restricciones presupuestales y de rendimientos esperados.

El MÉTODO PROPUESTO en este trabajo es un paso hacia una propuesta algorítmica para el caso de programación no lineal y sería interesante estudiar, en un trabajo futuro, su factibilidad.



BIBLIOGRAFÍA

1. ADELSON, R.M. "Criteria for Capital Investment An Approach Through Decision Theory. Operational Research Quarterly. March 1965, Págs. 19 – 50.
2. ALEXANDER, G. J.; SHARPE, W. F.; BAILEY, J. V. – "Fundamentos de Inversiones, Teoría y Práctica". (3ª edición). México, Pearson Educación, 2003. Pág. 781
3. BLACK, F. (1972): "Capital Market equilibrium with restricted borrowing". Journal of business, Julio, 444-455.
4. BLOCK S.-HIRT G.-"Fundamentos de Gerencia Financiera"- Edit. McGraw Hill, Colombia. 2001.
5. BODIE, ZVI Y MERTON, Robert (1999) ."Finanzas". Mexico D.F.. Prentice Hall. Pags. 70 - 75
6. BREALEY, Richard. A. y MYERS, Stewart C., "Fundamentos de Financiación Empresarial", trad de C. Ansotegui Olcoz, 5ª Ed. Madrid. McGraw-Hill, 1993, Cap. 8. Págs. 129.
7. BREALEY A., Richard. *Principios de Finanzas Corporativas*. 2da. Edición. McGraw-Hill, México. 1991. Pág.203
8. BERTRÁN, Jacquildat – "Mercado Financiero y Gestión de Cartera de Valores". Págs. 45-49 y 99-125
9. BRIGMAN F. Eugene - "Fundamentos de Administración Financiera" McGraw Hill. Págs. 187 – 226
10. CAI, TEO, YANG, AND ZHOU *Portfolio Optimization Under a Minimax Rule* Management Science/Vol. 46, No. 7, July 2000
11. CHIANG, A. C. (1984). – "Métodos Fundamentales de Economía Matemática" (3ra edición, 1987). México, McGraw-Hill, 1991. Pág. 805.
12. DIEZ CANEDO, Márquez Javier – "Carteras de inversión. Fundamentos Teóricos" Limusa. Págs. 32-46; 56-68 y 94 – 109
13. DOMÍNGUEZ MACHUCA J.A. – "El subsistema de Inversión y financiero de la Empresa". Págs. 457-491
14. DURÁN, J.J., - "Economía y Dirección Financiera de la Empresa", Pirámide, 1992 - Madrid.

15. ELBAUM A. Marcelo - "Administración de carteras de inversión". 2004 Ediciones Macchi. Pags. 116 -152.
16. ELTON, E.J. AND GRUBER, M.J., "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis", 5TH, *John Wiley & Sons*, inc., p. 183, 1995.
17. FERRUZ, L. y SARTO, J. L. (1996): «Revisión crítica de las medidas clásicas de performance de carteras y propuesta de índices alternativos. Aplicación a fondos de inversión españoles (1990- 1995)». *Boletín de Estudios Económicos*, n.º 162, Págs. 549-573.
18. GITMAN Lawrence j. - "Administración Financiera" Pearson Educación. Págs. 200 - 214
19. HAMDY A. Taha - "Investigación de Operaciones" – 7ª. Edición. Editorial. Pearson. Educación. México - 2004. Pag. 747
20. HERNÁN ALDO, Alonso – "Administración de las Finanzas de la Empresa" Editorial Macchi. 1990. Págs. 285
21. HICKS, J. (1939). Value and Capital, Segunda Edición, Londres, Oxford University Press. Reporte del Emisor. Investigacion r informacion economica . Bogota D.C. Enero 2003. No. 44
22. LINTNER, J., "The Evaluation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets," *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, p. 13-37, 1965.
23. MARÍN, J. y Rubio, G.: "Economía financiera", Antoni Bosch, Barcelona. 2001
24. MARKOWITZ, Harry M... *Portfolio Selection*, BlackWell, Cambridge, MA, 1959.
25. MARKOWITZ, H.M. (1959). "Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments". Cowles Foundation. Monograph 16 Yale University Press, 1959
26. MARQUEZ, Jaime (1987): Money Demand in Open Economies: A Currency Substitution Model for Venezuela. *Journal of International. Money and finance*, Vol. 6 No.2 . North Holland. Elsevier B.V. Junio. Pags 167-178
27. MARTÍN, J.L. y Ruiz, R.J.: "*El inversor y los mercados financieros*". Ariel. Barcelona. 1991

28. MARTINEZ ABASCAL, Eduardo, - “Invertir en Bolsa”, Barcelona, McGraw-Hill, 1999. Págs 118.
29. MICHAUD R. O. (1989): “The Markowitz optimized optimal” Financial Analyst Journal, No. 45, Enero – Febrero, Págs 31-42
30. MIRALLES MARCELO, J.L. y J.L. MIRALLES QUIRÓS, “Análisis Bursátil: Estructura del Mercado y Estrategias de Inversión”. Ed. Universitas, Badajoz. 2002
31. MOJICA PALACIOS, José - “Investigación de Operaciones- Aplicación a las Ciencias Sociales”. Editorial Trillas – 2002. México
32. PASCALE Ricardo, “Decisiones Financieras”, 3ª Ed., Macchi Buenos Aires, 1998 págs. 160.
33. PASTOR PAREDES, Jorge L. - “Teoría financiera” - Universidad Nacional Federico Villarreal Escuela universitaria de postgrado. 2004 Págs. 650 -909.
34. SACHS, Jeffrey D. Y LARRAÍN, Felipe, “Macroeconomía en la economía global”, (México, Prentice Hall, 1993), Pág. 631.
35. SAMUELSON, Paul . “Economía”. Buenos Aires. McGraw – Hill, 2004. Pag. 743.
36. SHARPE, W.F.; Alexander, G.J, y Bailey, J.V.: “Investments”. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1999 (6ª edición).
37. SHARPE, William : “Teoría de cartera y del mercado de capitales”, EE.UU, 1976, McGraw Hill. Pág. 357.
38. TOBIN, J. “Liquidity Preference as Behavior Toward Risk”, Review of Economic Studies, 25. Febrero 1958, Págs. 65 - 86.
39. VAN HORNE. "Administración Financiera", Edit. Prentice Hall Hispanoamericana. España, 1999. Pag. 29 – 42
40. WEINGARTNER, H.M. “Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems”. New York. Prentice Hall, 1966., Pág. 485
41. WinQSB. Decision support software for MS/OM. Yih-Long Chang, John Wiley & Sons, Inc. 1998.

REVISTAS:

42. ACOSTA, E. y González, B. (1999): «Formación de carteras con riesgo condicionado. Una aplicación empírica al mercado de valores español». *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, Vol. XXVIII, n. ° 102
43. ALBERS BURLINGTON, Jack. A. (2001). Manejo de la cartera de activos para el crecimiento estratégico - Resources Internacional. Houston. Texas
44. BARQUÍN GIL, Julián. (2003). Negocios Arriesgados Universidad Pontificia Técnicas ICAI.
45. CHRISTIAN Andrew – (2000). Métodos de Evaluación del Riesgo para Portafolios de Inversión. Johnson, No. 67. Marzo- 2000.
46. MARKOWITZ, H.M. y Perold A.F. (1981) “Portfolio Analysis with Factors and Scenarios”. *The Journal of Finance*. Vo. XXXVI. N° 14. September 1981. Págs. 871-877
47. SHARPE William F. (1964) “Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk”. *Journal of Finance*. September 1964. Págs. 425-452

PÁGINAS WEB

48. BALZAROTTI Verónica y Delfineri Miguel - Teoría de valores extremos aplicada a la medición de riesgos de mercado en Argentina.
http://www.bcra.gov.ar/institucional/in060300_i.asp
49. Bolsa de Valores de Lima. (2004) *Indicadores Bursátiles: 1992-2003*.
<http://www.bvl.com.pe/>).
50. Comisión Nacional Supervisora de Empresas y Valores www.conasev.gob.pe
51. Escuela de Investigación y Negocios: www.aempresarial.com
52. Ministerio de Economía y Finanzas. www.mf.gob.pe
53. ORELLANA Orlando, GROSSO Grazioli – Cartera de Inversión UNR.
Paraná -2004 – orellanao@yahoo.com.ar
54. PAREJA Velez, Ignacio. (2005). Decisiones de Inversión
<http://sigma.poligran.edu.co/politecnico/apoyo/>

ANEXO

Tabla No. 3 Precio de cierre de 10 activos o empresas accionarias seleccionadas

INFORMACION BURSATIL

Minera Atacocha	Teléfonica del Perú		Backus & Johnston	Corpora. Aceros Arequipa		Edelnor SA	
	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización		Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización
07/02/2001	12	2.06	07/02/2001	1.04	0.29	07/02/2001	0.78
16/02/2001	12.64	2.19	16/02/2001	1.01	0.3	16/02/2001	0.79
27/02/2001	12	2.21	27/02/2001	0.98	0.32	27/02/2001	0.76
08/03/2001	13.57	2.17	08/03/2001	1.01	0.35	08/03/2001	0.77
19/03/2001	14.2	2.02	19/03/2001	1.03	0.33	19/03/2001	0.79
28/03/2001	12.01	1.87	28/03/2001	1.02	0.34	28/03/2001	0.76
06/04/2001	12.03	1.83	06/04/2001	1	0.33	06/04/2001	0.77
17/04/2001	12.01	1.67	17/04/2001	0.95	0.35	17/04/2001	0.75
26/04/2001	11.45	1.63	26/04/2001	0.96	0.34	26/04/2001	0.67
08/05/2001	12.51	1.78	08/05/2001	1	0.35	08/05/2001	0.66
17/05/2001	12.52	1.74	17/05/2001	1.02	0.36	17/05/2001	0.73
28/05/2001	12.33	1.81	28/05/2001	1.04	0.42	28/05/2001	0.81
06/06/2001	12.38	1.67	06/06/2001	1.05	0.41	06/06/2001	0.76
15/06/2001	12.35	1.38	15/06/2001	1.06	0.39	15/06/2001	0.77
26/06/2001	12.41	1.43	26/06/2001	1.05	0.42	26/06/2001	0.81
05/07/2001	12.5	1.37	05/07/2001	1.04	0.45	05/07/2001	0.82
16/07/2001	11.91	1.32	16/07/2001	0.98	0.46	16/07/2001	0.85
25/07/2001	10.51	1.17	25/07/2001	0.95	0.44	25/07/2001	0.82
03/08/2001	10.53	1.03	03/08/2001	0.98	0.45	03/08/2001	0.77
14/08/2001	10.5	0.89	14/08/2001	1.02	0.44	14/08/2001	0.8
23/08/2001	10.57	0.83	23/08/2001	0.99	0.45	23/08/2001	0.82
04/09/2001	11.89	0.9	04/09/2001	1	0.4	04/09/2001	0.77
13/09/2001	12.65	0.97	13/09/2001	1.03	0.35	13/09/2001	0.8
24/09/2001	13	0.94	24/09/2001	0.98	0.33	24/09/2001	0.82
03/10/2001	13.1	1.04	03/10/2001	0.93	0.32	03/10/2001	0.83
12/10/2001	12.78	1.17	12/10/2001	0.91	0.34	12/10/2001	0.84

Minera Atacocha	Teléfono del Perú		Backus & Johnston		Corpora. Aceros Arequipa		Edelnor SA	
	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización
23/10/2001	12.5	23/10/2001	1.09	23/10/2001	0.97	23/10/2001	0.32	23/10/2001
01/11/2001	12.51	01/11/2001	0.94	01/11/2001	0.88	01/11/2001	0.35	01/11/2001
12/11/2001	12.52	12/11/2001	0.96	12/11/2001	0.89	12/11/2001	0.39	12/11/2001
21/11/2001	12.53	21/11/2001	0.91	21/11/2001	0.88	21/11/2001	0.45	21/11/2001
30/11/2001	12.5	30/11/2001	0.86	30/11/2001	0.91	30/11/2001	0.44	30/11/2001
11/12/2001	12.52	11/12/2001	0.72	11/12/2001	0.92	11/12/2001	0.45	11/12/2001
20/12/2001	14.2	20/12/2001	0.61	20/12/2001	0.93	20/12/2001	0.46	20/12/2001
02/01/2002	14.22	02/01/2002	0.63	02/01/2002	0.91	02/01/2002	0.45	02/01/2002
11/01/2002	12.51	11/01/2002	0.62	11/01/2002	0.9	11/01/2002	0.46	11/01/2002
22/01/2002	12.84	22/01/2002	0.53	22/01/2002	0.91	22/01/2002	0.45	22/01/2002
31/01/2002	12.73	31/01/2002	0.52	31/01/2002	0.92	31/01/2002	0.46	31/01/2002
11/02/2002	12.71	11/02/2002	0.48	11/02/2002	0.93	11/02/2002	0.45	11/02/2002
20/02/2002	12	20/02/2002	0.54	20/02/2002	0.91	20/02/2002	0.5	20/02/2002
01/03/2002	12.2	01/03/2002	0.61	01/03/2002	0.93	01/03/2002	0.57	01/03/2002
12/03/2002	12	12/03/2002	0.65	12/03/2002	0.91	12/03/2002	0.54	12/03/2002
21/03/2002	12.1	21/03/2002	0.6	21/03/2002	0.89	21/03/2002	0.55	21/03/2002
01/04/2002	12	01/04/2002	1.05	01/04/2002	0.9	01/04/2002	0.51	01/04/2002
10/04/2002	12.3	10/04/2002	1.16	10/04/2002	0.91	10/04/2002	0.53	10/04/2002
19/04/2002	12.64	19/04/2002	1.07	19/04/2002	0.89	19/04/2002	0.49	19/04/2002
30/04/2002	12.58	30/04/2002	0.98	30/04/2002	0.91	30/04/2002	0.48	30/04/2002
10/05/2002	12.5	10/05/2002	0.95	10/05/2002	0.92	10/05/2002	0.49	10/05/2002
21/05/2002	12.85	21/05/2002	1.25	21/05/2002	0.89	21/05/2002	0.48	21/05/2002
30/05/2002	12.51	30/05/2002	1.77	30/05/2002	0.84	30/05/2002	0.49	30/05/2002
10/06/2002	12.5	10/06/2002	1.86	10/06/2002	0.86	10/06/2002	0.46	10/06/2002
19/06/2002	12.86	19/06/2002	1.75	19/06/2002	0.83	19/06/2002	0.44	19/06/2002
28/06/2002	12.5	28/06/2002	1.77	28/06/2002	0.78	28/06/2002	0.45	28/06/2002
09/07/2002	12.55	09/07/2002	0.85	09/07/2002	0.79	09/07/2002	0.46	09/07/2002
18/07/2002	12.56	18/07/2002	0.78	18/07/2002	0.93	18/07/2002	0.45	18/07/2002
29/07/2002	12.8	29/07/2002	0.63	29/07/2002	1	29/07/2002	0.44	29/07/2002
07/08/2002	12.5	07/08/2002	0.62	07/08/2002	0.97	07/08/2002	0.46	07/08/2002

Minera Atacocha	Teléfonica del Perú		Backus & Johnston	Corpora. Aceros Arequipa		Edelnor SA			
	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización		Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización		
16/08/2002	12.6	16/08/2002	0.63	16/08/2002	0.98	16/08/2002	0.44	16/08/2002	0.91
27/08/2002	12.65	27/08/2002	0.54	27/08/2002	0.97	27/08/2002	0.43	27/08/2002	0.93
05/09/2002	12.72	05/09/2002	0.53	05/09/2002	0.96	05/09/2002	0.44	05/09/2002	0.96
16/09/2002	12.5	16/09/2002	0.48	16/09/2002	0.92	16/09/2002	0.43	16/09/2002	0.97
25/09/2002	12.56	25/09/2002	0.53	25/09/2002	0.91	25/09/2002	0.44	25/09/2002	0.99
04/10/2002	12.8	04/10/2002	0.58	04/10/2002	0.94	04/10/2002	0.45	04/10/2002	0.98
15/10/2002	12.5	15/10/2002	0.67	15/10/2002	0.98	15/10/2002	0.46	15/10/2002	0.99
24/10/2002	12.6	24/10/2002	0.61	24/10/2002	1	24/10/2002	0.44	24/10/2002	0.97
04/11/2002	12.71	04/11/2002	0.57	04/11/2002	1.03	04/11/2002	0.46	04/11/2002	0.99
13/11/2002	12.65	13/11/2002	0.58	13/11/2002	1.06	13/11/2002	0.52	13/11/2002	0.98
22/11/2002	12.5	22/11/2002	0.6	22/11/2002	1.07	22/11/2002	0.51	22/11/2002	0.99
03/12/2002	12.71	03/12/2002	0.67	03/12/2002	1.14	03/12/2002	0.5	03/12/2002	0.9
12/12/2002	12.65	12/12/2002	0.61	12/12/2002	1.12	12/12/2002	0.49	12/12/2002	0.98
23/12/2002	12.63	23/12/2002	0.57	23/12/2002	1.13	23/12/2002	0.54	23/12/2002	0.99
06/01/2003	12.72	06/01/2003	0.59	06/01/2003	1.16	06/01/2003	0.62	06/01/2003	0.98
15/01/2003	12.92	15/01/2003	0.6	15/01/2003	1.21	15/01/2003	0.64	15/01/2003	0.99
24/01/2003	13	24/01/2003	0.64	24/01/2003	1.28	24/01/2003	0.67	24/01/2003	1.02
04/02/2003	12.91	04/02/2003	0.62	04/02/2003	1.35	04/02/2003	0.65	04/02/2003	1.01
13/02/2003	12.93	13/02/2003	0.59	13/02/2003	1.46	13/02/2003	0.66	13/02/2003	1.03
25/02/2003	13.01	25/02/2003	0.64	25/02/2003	1.43	25/02/2003	0.63	25/02/2003	1.09
06/03/2003	13	06/03/2003	0.65	06/03/2003	1.34	06/03/2003	0.65	06/03/2003	1.14
17/03/2003	13.5	17/03/2003	0.63	17/03/2003	1.32	17/03/2003	0.66	17/03/2003	1.15
26/03/2003	14	26/03/2003	0.71	26/03/2003	1.33	26/03/2003	0.67	26/03/2003	1.14
04/04/2003	14.97	04/04/2003	0.77	04/04/2003	1.4	04/04/2003	0.66	04/04/2003	1.16
15/04/2003	16.12	15/04/2003	0.9	15/04/2003	1.42	15/04/2003	0.68	15/04/2003	1.17
24/04/2003	16.29	24/04/2003	0.78	24/04/2003	1.43	24/04/2003	0.7	24/04/2003	1.14
06/05/2003	16.11	06/05/2003	0.82	06/05/2003	1.42	06/05/2003	0.72	06/05/2003	1.15
15/05/2003	17.17	15/05/2003	0.88	15/05/2003	1.41	15/05/2003	0.67	15/05/2003	1.16
26/05/2003	19.03	26/05/2003	0.92	26/05/2003	1.39	26/05/2003	0.66	26/05/2003	1.19
04/06/2003	19.17	04/06/2003	0.9	04/06/2003	1.35	04/06/2003	0.64	04/06/2003	1.23

Minera Atacocha	Telefónica del Perú		Backus & Johnston		Corpora. Aceros Arequipa		Edelnor SA		
	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	
13/06/2003	16	13/06/2003	0.89	13/06/2003	1.37	13/06/2003	0.62	13/06/2003	1.29
24/06/2003	16.22	24/06/2003	0.81	24/06/2003	1.2	24/06/2003	0.61	24/06/2003	1.32
03/07/2003	16	03/07/2003	0.85	03/07/2003	1.21	03/07/2003	0.6	03/07/2003	1.34
14/07/2003	16.01	14/07/2003	0.89	14/07/2003	1.15	14/07/2003	0.57	14/07/2003	1.35
23/07/2003	16	23/07/2003	0.93	23/07/2003	1.14	23/07/2003	0.58	23/07/2003	1.36
05/08/2003	16.91	05/08/2003	0.94	05/08/2003	1.15	05/08/2003	0.57	05/08/2003	1.37
14/08/2003	16.45	14/08/2003	1.28	14/08/2003	1.13	14/08/2003	0.59	14/08/2003	1.38
25/08/2003	16.49	25/08/2003	1.46	25/08/2003	1.11	25/08/2003	0.55	25/08/2003	1.37
03/09/2003	16.67	03/09/2003	1.39	03/09/2003	0.98	03/09/2003	0.59	03/09/2003	1.39
12/09/2003	17.46	12/09/2003	1.36	12/09/2003	0.99	12/09/2003	0.57	12/09/2003	1.37
23/09/2003	16.21	23/09/2003	1.42	23/09/2003	1.01	23/09/2003	0.59	23/09/2003	1.4
02/10/2003	16.67	02/10/2003	1.36	02/10/2003	1.03	02/10/2003	0.6	02/10/2003	1.41
13/10/2003	17.46	13/10/2003	1.34	13/10/2003	1.01	13/10/2003	0.59	13/10/2003	1.35
22/10/2003	16.21	22/10/2003	1.39	22/10/2003	0.96	22/10/2003	0.58	22/10/2003	1.17
31/10/2003	17.39	31/10/2003	1.36	31/10/2003	0.95	31/10/2003	0.6	31/10/2003	1.19
11/11/2003	16.45	11/11/2003	1.37	11/11/2003	0.89	11/11/2003	0.64	11/11/2003	1.14
20/11/2003	16.49	20/11/2003	1.38	20/11/2003	0.91	20/11/2003	0.67	20/11/2003	1.18
01/12/2003	16.47	01/12/2003	1.39	01/12/2003	0.94	01/12/2003	0.68	01/12/2003	1.19
10/12/2003	16.4	10/12/2003	1.38	10/12/2003	0.93	10/12/2003	0.66	10/12/2003	1.18
19/12/2003	16.47	19/12/2003	1.4	19/12/2003	0.98	19/12/2003	0.67	19/12/2003	1.19
05/01/2004	16.4	05/01/2004	1.37	05/01/2004	1.01	05/01/2004	0.84	05/01/2004	1.18
14/01/2004	17.37	14/01/2004	1.43	14/01/2004	1.12	14/01/2004	0.92	14/01/2004	1.2
23/01/2004	16.3	23/01/2004	1.45	23/01/2004	1.14	23/01/2004	0.91	23/01/2004	1.18
03/02/2004	16.67	03/02/2004	1.09	03/02/2004	1.08	03/02/2004	0.93	03/02/2004	1.15
12/02/2004	16.7	12/02/2004	0.99	12/02/2004	1.03	12/02/2004	0.95	12/02/2004	1.3
23/02/2004	16.67	23/02/2004	0.84	23/02/2004	0.99	23/02/2004	0.89	23/02/2004	1.34
03/03/2004	17.03	03/03/2004	0.89	03/03/2004	0.97	03/03/2004	0.93	03/03/2004	1.35
12/03/2004	16.92	12/03/2004	0.95	12/03/2004	0.98	12/03/2004	1.03	12/03/2004	1.36
23/03/2004	16.4	23/03/2004	1.23	23/03/2004	0.99	23/03/2004	1.08	23/03/2004	1.33
01/04/2004	16.67	01/04/2004	1.24	01/04/2004	1.01	01/04/2004	1.09	01/04/2004	1.29

Minera Atacocha	Telefónica del Perú		Backus & Johnston		Corpora. Aceros Arequipa		Edelnor SA	
	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización
12/04/2004	16.69	12/04/2004	1.22	12/04/2004	0.98	12/04/2004	1.26	12/04/2004
21/04/2004	17.37	21/04/2004	1.05	21/04/2004	0.99	21/04/2004	1.25	21/04/2004
30/04/2004	16.07	30/04/2004	1.12	30/04/2004	0.9	30/04/2004	1.26	30/04/2004
11/05/2004	16.68	11/05/2004	1.13	11/05/2004	0.92	11/05/2004	1.25	11/05/2004
20/05/2004	16.67	20/05/2004	1.14	20/05/2004	1.07	20/05/2004	1.38	20/05/2004
31/05/2004	16.04	31/05/2004	1.15	31/05/2004	1.08	31/05/2004	1.31	31/05/2004
09/06/2004	16.47	09/06/2004	1.17	09/06/2004	1.06	09/06/2004	1.24	09/06/2004
18/06/2004	16.87	18/06/2004	1.13	18/06/2004	1.08	18/06/2004	1.28	18/06/2004
29/06/2004	19.03	29/06/2004	1.14	29/06/2004	1.09	29/06/2004	1.26	29/06/2004
09/07/2004	19.77	09/07/2004	1.17	09/07/2004	1.07	09/07/2004	1.23	09/07/2004
20/07/2004	20.58	20/07/2004	1.24	20/07/2004	1.04	20/07/2004	1.26	20/07/2004
02/08/2004	21.4	02/08/2004	1.25	02/08/2004	1.03	02/08/2004	1.33	02/08/2004
11/08/2004	21.8	11/08/2004	1.44	11/08/2004	1.02	11/08/2004	1.38	11/08/2004
20/08/2004	24.14	20/08/2004	1.74	20/08/2004	1.04	20/08/2004	1.42	20/08/2004
31/08/2004	24.25	31/08/2004	1.75	31/08/2004	1.03	31/08/2004	1.48	31/08/2004
09/09/2004	21.59	09/09/2004	1.56	09/09/2004	1.02	09/09/2004	1.54	09/09/2004
20/09/2004	19.8	20/09/2004	1.92	20/09/2004	1.01	20/09/2004	1.71	20/09/2004
29/09/2004	20.02	29/09/2004	2.25	29/09/2004	1	29/09/2004	1.77	29/09/2004
08/10/2004	20.1	08/10/2004	2.14	08/10/2004	1.02	08/10/2004	1.93	08/10/2004
19/10/2004	19.69	19/10/2004	2.21	19/10/2004	1.04	19/10/2004	2.2	19/10/2004
28/10/2004	19.85	28/10/2004	1.54	28/10/2004	1.15	28/10/2004	2.17	28/10/2004
08/11/2004	20.1	08/11/2004	1.53	08/11/2004	1.27	08/11/2004	2.12	08/11/2004
17/11/2004	20.11	17/11/2004	1.54	17/11/2004	1.28	17/11/2004	2.07	17/11/2004
26/11/2004	20.1	26/11/2004	1.53	26/11/2004	1.19	26/11/2004	2	26/11/2004
07/12/2004	19.6	07/12/2004	1.54	07/12/2004	1.2	07/12/2004	1.97	07/12/2004
16/12/2004	19.94	16/12/2004	1.53	16/12/2004	1.18	16/12/2004	1.91	16/12/2004
28/12/2004	20.1	28/12/2004	1.55	28/12/2004	1.19	28/12/2004	1.95	28/12/2004
07/01/2005	22.85	07/01/2005	1.54	07/01/2005	1.2	07/01/2005	2.11	07/01/2005
18/01/2005	26.82	18/01/2005	1.53	18/01/2005	1.18	18/01/2005	2.16	18/01/2005
27/01/2005	29.95	27/01/2005	1.79	27/01/2005	1.22	27/01/2005	2.13	27/01/2005

Minera Atacocha	Telefónica del Perú		Backus & Johnston		Corpora. Aceros Arequipa		Edelnor SA	
	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización
07/02/2005	34.49	07/02/2005	1.75	07/02/2005	1.24	07/02/2005	2.02	07/02/2005
16/02/2005	37.99	16/02/2005	1.69	16/02/2005	1.26	16/02/2005	2.01	16/02/2005
28/02/2005	39.48	28/02/2005	1.66	28/02/2005	1.27	28/02/2005	2.06	28/02/2005
09/03/2005	36.01	09/03/2005	1.79	09/03/2005	1.24	09/03/2005	2.12	09/03/2005
18/03/2005	35.4	18/03/2005	2.02	18/03/2005	1.26	18/03/2005	2.07	18/03/2005
29/03/2005	27.98	29/03/2005	2.15	29/03/2005	1.25	29/03/2005	2.12	29/03/2005
07/04/2005	31.25	07/04/2005	2.22	07/04/2005	1.31	07/04/2005	2.09	07/04/2005
18/04/2005	31.81	18/04/2005	2.2	18/04/2005	1.39	18/04/2005	2.11	18/04/2005
27/04/2005	33.44	27/04/2005	2.1	27/04/2005	1.36	27/04/2005	2.1	27/04/2005
06/05/2005	32.63	06/05/2005	1.97	06/05/2005	1.35	06/05/2005	2.08	06/05/2005
17/05/2005	33	17/05/2005	2.24	17/05/2005	1.31	17/05/2005	2.02	17/05/2005
26/05/2005	33.67	26/05/2005	2.25	26/05/2005	1.32	26/05/2005	2.08	26/05/2005
06/06/2005	32.28	06/06/2005	2.26	06/06/2005	1.35	06/06/2005	2.11	06/06/2005
15/06/2005	33	15/06/2005	2.37	15/06/2005	1.34	15/06/2005	1.55	15/06/2005
24/06/2005	32.79	24/06/2005	2.43	24/06/2005	1.35	24/06/2005	1.53	24/06/2005
05/07/2005	33.69	05/07/2005	2.37	05/07/2005	1.38	05/07/2005	1.55	05/07/2005
14/07/2005	32.47	14/07/2005	2.57	14/07/2005	1.45	14/07/2005	1.53	14/07/2005
25/07/2005	33	25/07/2005	2.14	25/07/2005	1.51	25/07/2005	1.51	25/07/2005
05/08/2005	33.02	05/08/2005	2.35	05/08/2005	1.67	05/08/2005	1.49	05/08/2005
16/08/2005	33.65	16/08/2005	2.41	16/08/2005	1.74	16/08/2005	1.45	16/08/2005
25/08/2005	32.31	25/08/2005	2.62	25/08/2005	1.81	25/08/2005	1.44	25/08/2005
05/09/2005	33	05/09/2005	2.56	05/09/2005	1.85	05/09/2005	1.42	05/09/2005
14/09/2005	32.15	14/09/2005	2.54	14/09/2005	1.88	14/09/2005	1.44	14/09/2005
23/09/2005	36.88	23/09/2005	2.49	23/09/2005	1.93	23/09/2005	1.49	23/09/2005
04/10/2005	39.15	04/10/2005	2.39	04/10/2005	1.91	04/10/2005	1.56	04/10/2005
13/10/2005	39.09	13/10/2005	2.45	13/10/2005	1.87	13/10/2005	1.57	13/10/2005
24/10/2005	42.13	24/10/2005	2.24	24/10/2005	1.88	24/10/2005	1.55	24/10/2005
02/11/2005	40	02/11/2005	2.09	02/11/2005	1.93	02/11/2005	1.51	02/11/2005
11/11/2005	40.01	11/11/2005	2.15	11/11/2005	2.12	11/11/2005	1.55	11/11/2005
22/11/2005	42.11	22/11/2005	2.14	22/11/2005	2.16	22/11/2005	1.57	22/11/2005

Minera Atacocha	Telefónica del Perú	Backus & Johnston		Corpora. Aceros Arequipa		Edelnor SA	
Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal
01/12/2005	40	01/12/2005	2.09	01/12/2005	2.09	01/12/2005	1.53
12/12/2005	40.14	12/12/2005	2.1	12/12/2005	2.11	12/12/2005	1.55
21/12/2005	41.98	21/12/2005	2.03	21/12/2005	1.96	21/12/2005	1.38
30/12/2005	40	30/12/2005	2.02	30/12/2005	1.98	30/12/2005	1.45
11/01/2006	38.83	11/01/2006	2	11/01/2006	1.91	11/01/2006	1.3
20/01/2006	40.55	20/01/2006	1.93	20/01/2006	1.94	20/01/2006	1.4
31/01/2006	49.16	31/01/2006	1.98	31/01/2006	2.13	31/01/2006	1.57
09/02/2006	50.15	09/02/2006	1.95	09/02/2006	2.23	09/02/2006	1.55
20/02/2006	50.45	20/02/2006	1.98	20/02/2006	2.15	20/02/2006	1.54
01/03/2006	49.27	01/03/2006	2.05	01/03/2006	2.26	01/03/2006	1.49
10/03/2006	48.41	10/03/2006	2.13	10/03/2006	2.1	10/03/2006	1.44
21/03/2006	50.17	21/03/2006	1.99	21/03/2006	2.41	21/03/2006	1.37
30/03/2006	48.42	30/03/2006	2.01	30/03/2006	2.47	30/03/2006	1.36
10/04/2006	50.34	10/04/2006	2.09	10/04/2006	2.48	10/04/2006	1.4
21/04/2006	55.53	21/04/2006	1.98	21/04/2006	2.28	21/04/2006	1.5
03/05/2006	66.85	03/05/2006	1.99	03/05/2006	2.15	03/05/2006	1.51
12/05/2006	69.48	12/05/2006	1.89	12/05/2006	2.11	12/05/2006	1.55
23/05/2006	66.52	23/05/2006	1.84	23/05/2006	2.01	23/05/2006	1.6
01/06/2006	66.05	01/06/2006	1.88	01/06/2006	2.02	01/06/2006	1.53

Fuente: Precio de cierre. Bolsa de Valores de Lima (CONASEV).

Cartavio	Precio Cierre semanal	Southern Perú	Luz del Sur SA	Cementos Lima SA	Tumán Agroindustria	Precio Cierre semanal
Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Precio Cierre semanal
07/02/2001	1.09	07/02/2001	12	07/02/2001	49.14	1.45
16/02/2001	1.06	16/02/2001	12.64	16/02/2001	48.41	1.39
27/02/2001	1.04	27/02/2001	12	27/02/2001	49.74	1.22
08/03/2001	1.44	08/03/2001	13.88	08/03/2001	49.44	1.18
19/03/2001	1.18	19/03/2001	13.87	19/03/2001	48.07	1.14
28/03/2001	1.09	28/03/2001	12.01	28/03/2001	47.61	1.15
06/04/2001	1.04	06/04/2001	12	06/04/2001	46.37	1.07
17/04/2001	0.94	17/04/2001	12.06	17/04/2001	44.69	1.03
26/04/2001	1.03	26/04/2001	11.44	26/04/2001	41.37	0.99
08/05/2001	1.6	08/05/2001	12.51	08/05/2001	37.95	0.92
17/05/2001	1.7	17/05/2001	12.53	17/05/2001	38.93	0.89
28/05/2001	1.72	28/05/2001	12.33	28/05/2001	41.51	1.05
06/06/2001	1.73	06/06/2001	12.38	06/06/2001	44.21	1.15
15/06/2001	1.44	15/06/2001	12.35	15/06/2001	43.55	1.17
26/06/2001	1.01	26/06/2001	12.41	26/06/2001	41.19	1.08
05/07/2001	0.94	05/07/2001	12.48	05/07/2001	41.89	1.2
16/07/2001	1.08	16/07/2001	11.91	16/07/2001	41.34	1.16
25/07/2001	1.65	25/07/2001	10.51	25/07/2001	38.52	1.08
03/08/2001	1.7	03/08/2001	10.52	03/08/2001	36.52	1.21
14/08/2001	1.73	14/08/2001	10.5	14/08/2001	42	1.4
23/08/2001	1.53	23/08/2001	10.57	23/08/2001	39.01	1.42
04/09/2001	1.04	04/09/2001	11.89	04/09/2001	35.38	1.52
13/09/2001	0.94	13/09/2001	12.65	13/09/2001	35	0.99
24/09/2001	1.03	24/09/2001	13	24/09/2001	36.17	0.94
03/10/2001	1.6	03/10/2001	13.1	03/10/2001	35.38	0.88
12/10/2001	1.7	12/10/2001	12.78	12/10/2001	35.85	0.95
23/10/2001	1.51	23/10/2001	12.5	23/10/2001	37.67	0.97
01/11/2001	1.3	01/11/2001	12.55	01/11/2001	36.39	1.29
12/11/2001	1.22	12/11/2001	12.5	12/11/2001	36.65	0.84

Cartavio	Southern Perú	Luz del Sur SA	Cementos Lima SA	Tumán Agroindustria	
Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Precio Cierre semanal	Precio Cierre semanal	Precio Cierre semanal	Precio Cierre semanal
21/11/2001	1.21	12.75	2.07	35.71	0.86
30/11/2001	1.22	12.5	1.97	36.46	0.87
11/12/2001	1.21	12.59	1.98	39.69	0.88
20/12/2001	1.23	13.95	1.97	42.08	0.89
02/01/2002	1.28	14.2	1.99	39.92	0.88
11/01/2002	1.68	12.51	2	39.65	0.89
22/01/2002	1.7	12.83	2.04	41.43	0.88
31/01/2002	1.73	12.73	2.17	39.74	0.87
11/02/2002	1.72	12.71	2.19	38.23	0.79
20/02/2002	1.65	12	2.27	38.63	0.72
01/03/2002	1.6	12.1	2.43	39.26	0.75
12/03/2002	1.7	12.3	2.44	44.19	0.81
21/03/2002	1.73	12.5	2.38	49.54	0.8
01/04/2002	1.74	12.6	2.43	47.41	0.79
10/04/2002	1.75	12.7	2.42	46.58	0.86
19/04/2002	1.54	12.63	2.44	47.03	0.81
30/04/2002	1.71	12.59	2.48	46.52	0.79
10/05/2002	1.7	12.5	2.54	46.85	0.78
21/05/2002	1.54	12.85	2.57	50.76	0.79
30/05/2002	1.71	12.51	2.64	50.17	0.81
10/06/2002	1.7	12.5	2.61	53.19	0.78
19/06/2002	1.35	12.86	2.57	55.11	0.81
28/06/2002	1.26	12.5	2.56	53.37	0.79
09/07/2002	1.21	12.58	2.57	51.98	0.78
18/07/2002	1.22	12.56	2.58	54.5	0.79
29/07/2002	1.23	12.8	2.61	50.62	0.78
07/08/2002	1.25	12.5	2.62	53.88	0.81
16/08/2002	1.28	12.6	2.66	54.5	0.79
27/08/2002	1.31	12.65	2.77	52.51	0.78

Cartavio	Southern Perú		Luz del Sur SA		Cementos Lima SA		Tumán Agroindustria	
Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	
05/09/2002	1.23	05/09/2002	12.73	05/09/2002	2.84	05/09/2002	51.98	
16/09/2002	1.21	16/09/2002	12.5	16/09/2002	2.86	16/09/2002	54.5	
25/09/2002	1.24	25/09/2002	12.57	25/09/2002	2.91	25/09/2002	51.87	
04/10/2002	1.35	04/10/2002	12.8	04/10/2002	2.93	04/10/2002	52.63	
15/10/2002	1.26	15/10/2002	12.5	15/10/2002	2.99	15/10/2002	54.5	
24/10/2002	1.21	24/10/2002	12.59	24/10/2002	3.05	24/10/2002	54.6	
04/11/2002	1.27	04/11/2002	12.71	04/11/2002	3.14	04/11/2002	50.62	
13/11/2002	1.34	13/11/2002	12.65	13/11/2002	3.43	13/11/2002	53.88	
22/11/2002	1.27	22/11/2002	12.5	22/11/2002	3.49	22/11/2002	54.5	
03/12/2002	1.2	03/12/2002	12.71	03/12/2002	3.46	03/12/2002	50.95	
12/12/2002	1.06	12/12/2002	12.66	12/12/2002	3.45	12/12/2002	52.92	
23/12/2002	1.05	23/12/2002	12.64	23/12/2002	3.46	23/12/2002	51.03	
06/01/2003	0.96	06/01/2003	12.73	06/01/2003	3.44	06/01/2003	54.67	
15/01/2003	1.23	15/01/2003	12.93	15/01/2003	3.48	15/01/2003	58.69	
24/01/2003	1.53	24/01/2003	13	24/01/2003	3.54	24/01/2003	60.77	
04/02/2003	1.66	04/02/2003	12.92	04/02/2003	3.56	04/02/2003	61.56	
13/02/2003	1.79	13/02/2003	12.96	13/02/2003	3.61	13/02/2003	61.45	
25/02/2003	1.74	25/02/2003	13	25/02/2003	3.62	25/02/2003	61.86	
06/03/2003	1.65	06/03/2003	13.2	06/03/2003	3.61	06/03/2003	63.1	
17/03/2003	1.66	17/03/2003	13.5	17/03/2003	3.63	17/03/2003	64.5	
26/03/2003	1.67	26/03/2003	14	26/03/2003	3.62	26/03/2003	68.3	
04/04/2003	1.68	04/04/2003	14.97	04/04/2003	3.66	04/04/2003	70.04	
15/04/2003	1.69	15/04/2003	16.12	15/04/2003	3.74	15/04/2003	70.6	
24/04/2003	1.71	24/04/2003	16.29	24/04/2003	3.95	24/04/2003	71.7	
06/05/2003	1.73	06/05/2003	16.11	06/05/2003	4.08	06/05/2003	72.1	
15/05/2003	1.5	15/05/2003	17.18	15/05/2003	4.14	15/05/2003	68.26	
26/05/2003	1.25	26/05/2003	19.03	26/05/2003	4.18	26/05/2003	64.4	
04/06/2003	1.31	04/06/2003	19.17	04/06/2003	4.35	04/06/2003	64.5	
13/06/2003	1.37	13/06/2003	16	13/06/2003	4.27	13/06/2003	69.85	

Cartavio	Southern Perú		Luz del Sur SA		Cementos Lima SA		Tumán Agroindustria	
Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	
24/06/2003	1.39	24/06/2003	16.22	24/06/2003	4.28	24/06/2003	71.43	
03/07/2003	1.55	03/07/2003	16	03/07/2003	4.32	03/07/2003	71.5	
14/07/2003	1.3	14/07/2003	16.3	14/07/2003	4.3	14/07/2003	71.8	
23/07/2003	1.2	23/07/2003	16.41	23/07/2003	4.32	23/07/2003	71.5	
05/08/2003	1.23	05/08/2003	16.91	05/08/2003	4.38	05/08/2003	71.6	
14/08/2003	1.28	14/08/2003	16.45	14/08/2003	4.26	14/08/2003	71.8	
25/08/2003	1.5	25/08/2003	16.49	25/08/2003	4.28	25/08/2003	71.5	
03/09/2003	1.25	03/09/2003	16.67	03/09/2003	4.38	03/09/2003	71.7	
12/09/2003	1.2	12/09/2003	17.46	12/09/2003	4.37	12/09/2003	71.9	
23/09/2003	1.24	23/09/2003	16.21	23/09/2003	4.33	23/09/2003	71.4	
02/10/2003	1.49	02/10/2003	16.67	02/10/2003	4.34	02/10/2003	71.5	
13/10/2003	1.34	13/10/2003	17.46	13/10/2003	4.31	13/10/2003	71.6	
22/10/2003	1.2	22/10/2003	16.21	22/10/2003	4.11	22/10/2003	71.7	
31/10/2003	1.22	31/10/2003	17.39	31/10/2003	3.84	31/10/2003	71.5	
11/11/2003	1.2	11/11/2003	16.45	11/11/2003	3.57	11/11/2003	71.64	
20/11/2003	1.36	20/11/2003	16.49	20/11/2003	3.43	20/11/2003	71.6	
01/12/2003	1.44	01/12/2003	16.47	01/12/2003	3.51	01/12/2003	71.5	
10/12/2003	1.23	10/12/2003	16.4	10/12/2003	3.48	10/12/2003	71.8	
19/12/2003	1.28	19/12/2003	16.47	19/12/2003	3.49	19/12/2003	71.6	
05/01/2004	1.6	05/01/2004	16.4	05/01/2004	3.51	05/01/2004	71.7	
14/01/2004	1.64	14/01/2004	17.37	14/01/2004	3.55	14/01/2004	66.6	
23/01/2004	1.76	23/01/2004	16.3	23/01/2004	3.61	23/01/2004	67.07	
03/02/2004	1.77	03/02/2004	16.67	03/02/2004	3.63	03/02/2004	67.03	
12/02/2004	1.78	12/02/2004	16.68	12/02/2004	3.61	12/02/2004	65.3	
23/02/2004	1.79	23/02/2004	16.67	23/02/2004	3.45	23/02/2004	63.8	
03/03/2004	1.76	03/03/2004	17.03	03/03/2004	3.48	03/03/2004	62.4	
12/03/2004	1.77	12/03/2004	16.92	12/03/2004	3.47	12/03/2004	62.2	
23/03/2004	1.78	23/03/2004	16.4	23/03/2004	3.59	23/03/2004	62.3	
01/04/2004	1.76	01/04/2004	16.67	01/04/2004	3.68	01/04/2004	61.8	
12/04/2004	1.79	12/04/2004	16.7	12/04/2004	3.77	12/04/2004	61.63	

Cartavio	Southern Perú		Luz del Sur SA		Cementos Lima SA		Tumán Agroindustria	
Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	
21/04/2004	1.76	21/04/2004	17.37	21/04/2004	4.05	21/04/2004	61.9	
30/04/2004	1.77	30/04/2004	16.01	30/04/2004	4.16	30/04/2004	62.6	
11/05/2004	2.13	11/05/2004	16.68	11/05/2004	4.15	11/05/2004	62.03	
20/05/2004	2.18	20/05/2004	16.67	20/05/2004	4.16	20/05/2004	62.6	
31/05/2004	2.46	31/05/2004	16.04	31/05/2004	4.23	31/05/2004	62.2	
09/06/2004	2.6	09/06/2004	16.47	09/06/2004	4.24	09/06/2004	62.04	
18/06/2004	2.5	18/06/2004	16.87	18/06/2004	4.23	18/06/2004	62.71	
29/06/2004	2.65	29/06/2004	19.03	29/06/2004	4.24	29/06/2004	62.12	
09/07/2004	3.16	09/07/2004	19.84	09/07/2004	4.23	09/07/2004	62.04	
20/07/2004	3.66	20/07/2004	20.58	20/07/2004	4.22	20/07/2004	62.8	
02/08/2004	3.31	02/08/2004	21.4	02/08/2004	4.23	02/08/2004	62	
11/08/2004	3.22	11/08/2004	21.8	11/08/2004	4.24	11/08/2004	62.5	
20/08/2004	3.2	20/08/2004	24.14	20/08/2004	4.28	20/08/2004	62.8	
31/08/2004	3.07	31/08/2004	24.25	31/08/2004	4.3	31/08/2004	62.01	
09/09/2004	2.99	09/09/2004	21.59	09/09/2004	4.35	09/09/2004	62.04	
20/09/2004	2.77	20/09/2004	19.8	20/09/2004	4.4	20/09/2004	62.71	
29/09/2004	2.7	29/09/2004	20.02	29/09/2004	4.44	29/09/2004	62.12	
08/10/2004	2.75	08/10/2004	20.01	08/10/2004	4.48	08/10/2004	62.04	
19/10/2004	3.02	19/10/2004	19.69	19/10/2004	4.46	19/10/2004	62.25	
28/10/2004	3	28/10/2004	19.85	28/10/2004	4.49	28/10/2004	62.6	
08/11/2004	3.1	08/11/2004	20.1	08/11/2004	4.44	08/11/2004	62.03	
17/11/2004	2.96	17/11/2004	20.12	17/11/2004	4.45	17/11/2004	62.04	
26/11/2004	2.99	26/11/2004	20.15	26/11/2004	4.46	26/11/2004	62.81	
07/12/2004	3.07	07/12/2004	19.61	07/12/2004	4.48	07/12/2004	62.02	
16/12/2004	2.88	16/12/2004	19.44	16/12/2004	4.47	16/12/2004	62.61	
28/12/2004	2.84	28/12/2004	20.1	28/12/2004	4.5	28/12/2004	62.2	
07/01/2005	2.62	07/01/2005	22.86	07/01/2005	4.53	07/01/2005	61.97	
18/01/2005	2.71	18/01/2005	26.83	18/01/2005	4.61	18/01/2005	56.72	
27/01/2005	2.79	27/01/2005	29.95	27/01/2005	4.58	27/01/2005	51.57	

Cartavio	Southern Perú		Luz del Sur SA		Cementos Lima SA		Tumán Agroindustria	
Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Precio Cierre semanal
07/02/2005	2.76	07/02/2005	34.49	07/02/2005	4.54	07/02/2005	53.14	1.06
16/02/2005	2.77	16/02/2005	37.99	16/02/2005	4.45	16/02/2005	50.86	1.07
28/02/2005	3	28/02/2005	39.33	28/02/2005	4.35	28/02/2005	48.84	1.14
09/03/2005	3.15	09/03/2005	36.01	09/03/2005	4.42	09/03/2005	42.86	1.01
18/03/2005	2.98	18/03/2005	35.4	18/03/2005	4.39	18/03/2005	40.35	1.03
29/03/2005	3.12	29/03/2005	27.98	29/03/2005	4.24	29/03/2005	40.25	1.02
07/04/2005	3.2	07/04/2005	31.25	07/04/2005	4.3	07/04/2005	40.35	1
18/04/2005	2.99	18/04/2005	31.81	18/04/2005	4.17	18/04/2005	47	1.05
27/04/2005	3	27/04/2005	33.44	27/04/2005	3.94	27/04/2005	45.17	1.02
06/05/2005	3.1	06/05/2005	32.63	06/05/2005	3.83	06/05/2005	43.11	1.01
17/05/2005	3.19	17/05/2005	33	17/05/2005	3.75	17/05/2005	49.71	1.05
26/05/2005	4.07	26/05/2005	33.67	26/05/2005	3.78	26/05/2005	45.17	1.04
06/06/2005	4.2	06/06/2005	32.28	06/06/2005	3.77	06/06/2005	43.11	1.01
15/06/2005	4.13	15/06/2005	33	15/06/2005	3.91	15/06/2005	45	1.05
24/06/2005	3.93	24/06/2005	32.79	24/06/2005	4.01	24/06/2005	49.64	1.02
05/07/2005	3.77	05/07/2005	33.69	05/07/2005	4.07	05/07/2005	43.34	1.01
14/07/2005	3.73	14/07/2005	32.47	14/07/2005	4.14	14/07/2005	44.02	1.04
25/07/2005	4.09	25/07/2005	33	25/07/2005	4.21	25/07/2005	49.71	1.02
05/08/2005	4.21	05/08/2005	33.01	05/08/2005	4.23	05/08/2005	44.25	1.01
16/08/2005	4.2	16/08/2005	33.65	16/08/2005	4.24	16/08/2005	44.1	1.06
25/08/2005	4.29	25/08/2005	32.31	25/08/2005	4.22	25/08/2005	49.57	1.04
05/09/2005	3.87	05/09/2005	33	05/09/2005	4.25	05/09/2005	49.5	1.01
14/09/2005	3.94	14/09/2005	32.15	14/09/2005	4	14/09/2005	49.6	1.05
23/09/2005	4.09	23/09/2005	36.88	23/09/2005	3.87	23/09/2005	49.71	1.02
04/10/2005	4.14	04/10/2005	39.15	04/10/2005	3.9	04/10/2005	45.17	1.01
13/10/2005	3.87	13/10/2005	39.09	13/10/2005	3.92	13/10/2005	43.11	1.05
24/10/2005	4.25	24/10/2005	42.13	24/10/2005	3.87	24/10/2005	47.96	1.01
02/11/2005	3.9	02/11/2005	40	02/11/2005	3.89	02/11/2005	46.92	1.06
11/11/2005	3.98	11/11/2005	40.01	11/11/2005	3.82	11/11/2005	43.11	1.03
22/11/2005	4.29	22/11/2005	42.11	22/11/2005	3.77	22/11/2005	43.12	1.01

Cartavio	Southern Perú	Luz del Sur SA	Cementos Lima SA	Tumán Agroindustria	
Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal	Fecha Cotización	Precio Cierre semanal
01/12/2005	3.83	01/12/2005	3.78	01/12/2005	43.15
12/12/2005	3.94	12/12/2005	3.87	12/12/2005	43.11
21/12/2005	3.97	21/12/2005	3.89	21/12/2005	48.87
30/12/2005	4.02	30/12/2005	3.79	30/12/2005	46
11/01/2006	4.14	11/01/2006	3.75	11/01/2006	43.11
20/01/2006	4.09	20/01/2006	3.77	20/01/2006	40.62
31/01/2006	4.27	31/01/2006	3.86	31/01/2006	40.6
09/02/2006	5.66	09/02/2006	3.92	09/02/2006	43.75
20/02/2006	5.86	20/02/2006	3.94	20/02/2006	40.1
01/03/2006	5.17	01/03/2006	4	01/03/2006	38.04
10/03/2006	5.18	10/03/2006	3.98	10/03/2006	39.76
21/03/2006	6.09	21/03/2006	3.97	21/03/2006	40.82
30/03/2006	7.07	30/03/2006	3.94	30/03/2006	41.79
10/04/2006	7.54	10/04/2006	3.95	10/04/2006	40.39
21/04/2006	8.65	21/04/2006	3.55	21/04/2006	40.99
03/05/2006	8.4	03/05/2006	3.75	03/05/2006	41.6
12/05/2006	8.86	12/05/2006	3.13	12/05/2006	41.1
23/05/2006	8.31	23/05/2006	2.92	23/05/2006	40.53
01/06/2006	9.07	01/06/2006	2.62	01/06/2006	40.99

Fuente: Precio de cierre. Bolsa de Valores de Lima (CONASEV).

